Vorkurs 29.2.2024

$$\lg(x \cdot y) = \lg(x) + \lg(y)$$

$$\lg\left(\frac{2a}{b}\right) = \lg(2a) - \lg(b) = \lg(2) + \lg(a) - \lg(b)$$

$$\ln(c^8) = 8\ln(c)$$

$$\ln(a \cdot b^y) = \ln(a) + \ln(b^y) = \ln(a) + y\ln(b)$$

$$\ln(2x + y^2) =$$ nicht weiter vereinfachbar

$$\ln\left(\frac{x^8 \cdot m^7}{c^8 \cdot z^{-5}}\right) = \ln(x^8 \cdot m^7) - \ln(c^8 \cdot z^{-5})$$

$$= 8\ln(x) + 7\ln(m) - \left(8\ln(c) - 5\ln(z)\right)$$

$$= 8\ln(x) + 7\ln(m) - 8\ln(c) + 5\ln(z)$$

$$3\lg(a) - 8\lg(b) = \lg\left(\frac{a^3}{b^8}\right)$$

$$a\lg(x) - \frac{1}{b}\lg(y) - c\lg(z) = a\lg(x) - \left(\frac{1}{b}\lg(y) + c\lg(z)\right)$$

$$= \lg\left(\frac{x^8}{y^{1/b}\cdot z^c}\right)$$

$$\log_3(45) + \log_3(15) - \log_3(75) = \log_3\left(\frac{\overset{9}{\cancel{45}}\cdot\overset{1}{\cancel{15}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{75}}}\right) = \log_3(9) = 2$$

Graphische Darstellung

$a = 2$

$\log_2(1) = 0$

$\log_2(2) = 1$

$\log_2(4) = 2$

$\log_2(8) = 3$

$\log_2(\frac{1}{2}) = -1$

$\log_2(0)$ wird unendlich klein

$\log_2(b)$, $b < 0$ nicht definiert

$a = 4$

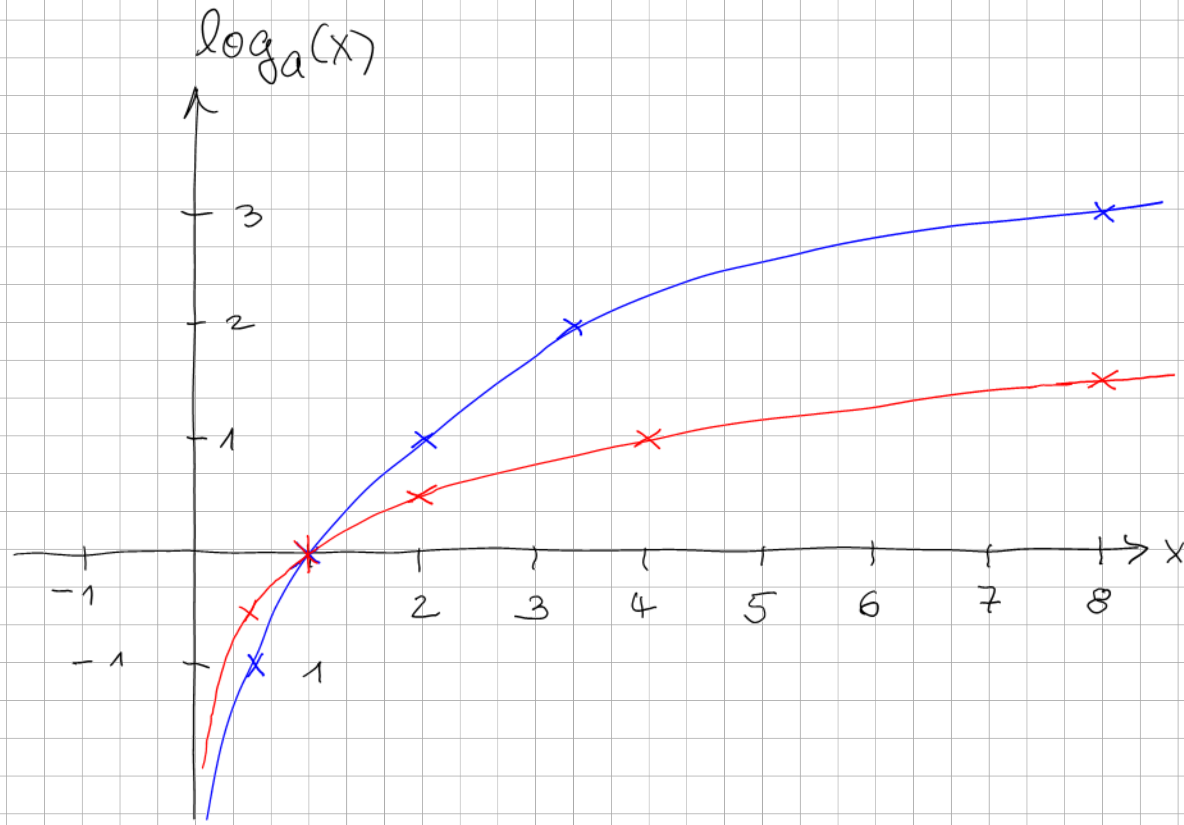
$\log_4(1) = 0$

$\log_4(2) = \frac{1}{2}$

$\log_4(4) = 1$

$\log_4(8) = \frac{3}{2}$

$\log_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$



$$\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = x$$

$$x = \frac{\log_5\left(\frac{1}{25}\right)}{\log_5\left(\sqrt[3]{5}\right)}$$

$$x = \frac{-2}{\frac{1}{3}}$$

$$x = -6$$

$$\log_x(512) = 9$$

$$x^9 = 512 \quad \left|\sqrt[9]{}\right.$$

$$x = 2$$

$$\log_{25}(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 25^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{25}}$$

$$x_1 = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = -\frac{1}{5} \qquad -\frac{1}{5} \notin \mathbb{D}$$

Daher ist nur x_1 die Lösung.

Beispiel zum Isotop mit $T_H = 30y$

$$600 = 10\,000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{30}} \quad | : 10\,000$$

$$\frac{6}{100} = 0{,}5^{\frac{t}{30}}$$

$$\log_{0{,}5}\left(\frac{6}{100}\right) = \frac{t}{30} \quad | \cdot 30$$

$$t = 30 \cdot \log_{0{,}5}\left(\frac{6}{100}\right)$$

$$t = 30 \cdot \frac{\ln\left(\frac{6}{100}\right)}{\ln(0{,}5)}$$

$$t \approx 121{,}77y$$

Start: 10 000 $\frac{Bq}{kg}$

^{137}Cs Wildschwein Bayern 2013

$600 \frac{Bq}{kg}$ EU

121,77 y

$30 \frac{Bq}{kg}$ D

251,42 y

$5 \frac{Bq}{kg}$ D Babynahrung

328,97 y

5.4 Exponentialgleichungen

Beispiel:

Zwei Sparverträge 1) 1,2 % , 1000 €

2) 5 Jahre später: 1,2 % , 1500 €

Wann erreicht man mit beiden Verträgen zusammen 4000 €?

$$K(t) = 1000 \cdot 1{,}012^{t} + 1500 \cdot 1{,}012^{t-5} \quad \text{für } t > 5$$

Weitere Beispiele:

1) Sparverträge wie eben, aber mit unterschiedlichen Zinssätzen

$$K(t) = 1000 \cdot 1{,}012^{t} + 1500 \cdot 1{,}011^{t-5}$$

2) Zwei radioaktive Isotope mit unterschiedlichen Halbwertszeiten

$$f(t) = 300 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{30}} + 200 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{70}}$$

Beispiele:

$$5^{2x-3} = 5^1$$

$$2x-3=1$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

$$9^{2x+2} = 27$$

$$(3^2)^{2x+2} = 3^3$$

$$2(2x+2) = 3$$

$$4x+4 = 3$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$7^{x-1} = 3 \cdot 5^x \quad | \ln(\dots)$$

$$\ln(7^{x-1}) = \ln(3 \cdot 5^x)$$

$$(x-1)\ln(7) = \ln(3) + x\ln(5)$$

$$x\ln(7) - \ln(7) = \ln(3) + x\ln(5)$$

$$x\ln(7) - x\ln(5) = \ln(3) + \ln(7)$$

$$x(\ln(7) - \ln(5)) = \ln(3) + \ln(7)$$

$$x = \frac{\ln(3)+\ln(7)}{\ln(7)-\ln(5)}$$

$$x = \frac{\ln(21)}{\ln(\frac{7}{5})}$$

$$x \approx 9{,}05$$

Anwendungsbeispiele

1) Ein Kapital von 7000€ wird jährlich mit 1,05% verzinst.
Nach wieviel Jahren ist es mit Zinseszinsen auf 12000€ angewachsen?

$$K(t) = 7000 \cdot 1{,}0105^t$$

$$12000 = 7000 \cdot 1{,}0105^t \quad | : 7000$$

$$\frac{12}{7} = 1{,}0105^t$$

$$\log_{1{,}0105}\left(\frac{12}{7}\right) = t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{12}{7}\right)}{\ln(1{,}0105)}$$

$$\ln\left(\frac{12}{7}\right) = \ln\left(1{,}0105^t\right)$$

$$\ln\left(\frac{12}{7}\right) = t \cdot \ln(1{,}0105)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{12}{7}\right)}{\ln(1{,}0105)}$$

$$t \approx 51{,}60\,y$$

2) Ein Kapital K wird jährlich mit 5% verzinst (mit Zinseszinsen).
Nach wieviel Jahren hat es sich verdoppelt?

$$K(t) = K \cdot 1{,}05^t$$

$$2K = K \cdot 1{,}05^t \quad | : K$$

$$2 = 1{,}05^t \quad | \ln(\cdots)$$

$$\ln(2) = t \cdot \ln(1{,}05)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)}$$

$$t \approx 14{,}21 \, y$$

Sparverträge vom Anfang des Kapitels

$$4000 = 1000 \cdot 1{,}02^{t} + 1500 \cdot 1{,}02^{t-5} \quad |:500$$

$$8 = 2 \cdot 1{,}02^{t} + 3 \cdot 1{,}02^{t-5}$$

$$8 = 2 \cdot 1{,}02^{t} + 3 \cdot 1{,}02^{t} \cdot 1{,}02^{-5}$$

$$8 = 1{,}02^{t} \left(2 + 3 \cdot 1{,}02^{-5} \right)$$

$$1{,}02^{t} = \frac{8}{2 + 3 \cdot 1{,}02^{-5}} \quad | \ln(\cdots)$$

$$t \ln(1{,}02) = \ln\left(\frac{8}{2+3 \cdot 1{,}02^{-5}} \right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{8}{2+3 \cdot 1{,}02^{-5}} \right)}{\ln(1{,}02)}$$

$$t \approx 26{,}67 \ y$$

Statt 1000 € nun 1600 €: $t \approx 29{,}5\,y$

Aufgaben

Skript Nr. 23, 24, 25, 30, 31

Zusatzdokument Kap. 5.3 Nr. 2-4

Skript Nr. 32

Zusatzdokument Kap. 5.4 Nr. 1-5