



Probe zur Lösung der Berechnungsbeispiele BB_8.x:

Allgemeine Hinweise:

Die Lösungen der Berechnungsbeispiele 8.x wurden mit einem (für diese Zwecke selbst entwickelten) **MATHEMATICA**-Programm getestet (siehe nachfolgende Tabellen und Funktionsverläufe).

Es berechnet mit den gegebenen Daten einer kugelsymmetrischen Anordnung mit geschichteter Leitfähigkeit (Erderform sowie r_0 ; r_G ; r_{PB} ; κ_{0-G} ; κ_{G-PB} ; h_0) und der Einspeisung I_0 folgende Größen:

- Teilwiderstände und resultierender Übergangswiderstand
- Maximale Schrittspannung
- Maximale elektrische Feldstärke

Weiterhin besteht die Möglichkeit, folgende Funktionsverläufe grafisch darzustellen:

- Feldstärkeverlauf auf der Erdoberfläche
- Potentialverlauf auf der Erdoberfläche
- Verlauf der Schrittspannung auf der Erdoberfläche

Falls zusätzlich die Position eines Läufers angegeben wird, der die Punkte A und B auf einer Linie in Richtung des Mittelpunktes der Eingrabstelle des Erders überbrückt, berechnet das Programm die aktuelle Schrittspannung.

Für die Berechnung der Überlagerung radialsymmetrischer elektrischer Strömungsfelder müssen zusätzlich die Koordinaten der als Punktquellen aufgefassten Kugeln sowie die Koordinaten von zwei Messpunkten angegeben werden. Dabei gilt die Randbedingung, dass sich die Mittelpunkte aller Punktquellen und die Messpunkte auf einer gemeinsamen Ebene befinden. Alle Berechnungen werden dann für diese Schnittfläche durchgeführt (ebenes Feldbild).

In dieser ebenen Felddarstellung ist es zulässig, die Vektoren der gerichteten Feldgrößen über komplexe Zahlen (gekennzeichnet durch einen Unterstrich – ansonsten sind es die Beträge) zu beschreiben. Das vereinfacht die Berechnung erheblich.

Für die elektrische Feldstärke in einem Feldpunkt (FP) auf dieser Ebene gilt dann:

$$\vec{E}_{FP} = E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \hat{=} \text{Re}\{\underline{E}_{FP}\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{E}_{FP}\}$$

LB 8.3: Maximale Schrittspannung (HKE)

Zur Überprüfung der allgemeinen Lösung im Lehrbuch werden folgende Zahlenwerte gewählt:

Geg.: $I_0 (\downarrow) = 100 \text{ A}$; $r_0 = 5 \text{ cm}$; $\kappa_{\text{Erde}} = 10^{-2} \text{ S / m}$; $s (U_{s,\text{max}}) = 80 \text{ cm}$; h (nur bei VKE) = 2 m

Grenzschicht (gesetzt): $r_G = 80 \text{ cm}$; $\kappa_{\text{Innen}} = \kappa_{\text{Außen}} = 10^{-2} \text{ S / m}$ (also homogenes κ)

Schrittspannung zwischen A und B (gesetzt): $r_A = 70 \text{ cm}$ und $r_B = 110 \text{ cm}$

Tabelle LB_8.3_1: Legende zur Tabelle LB_8.3_2 und Ausdruck der Lösungen (darunter)

Erdertyp			
$R_{\text{Ü,Innen}}$ in Ω	$R_{\text{Ü,Außen}}$ in Ω		
$R_{\text{Ü,HKE}}$ in Ω	$R_{\text{Ü,VKE}}$ in Ω	$R_{\text{Ü,Aktuell}}$ in Ω	
R_{AG} in Ω	R_{GB} in Ω	R_{AB} in Ω	
φ_0 in V	$U_{s,\text{max}}$ in V	U_{AB} in V	E_{max} in V / m

HKE

298.416	19.8944		
318.31	159.15	318.31	
2.84205	5.42574	8.26779	
31831.	29958.6	826.779	636.62

Tabelle LB_8.3_2: Lösungsübersicht zum LB 8.3

HKE			
$R_{\text{Ü,Innen}} \approx 298 \Omega$	$R_{\text{Ü,Außen}} \approx 20 \Omega$		
$R_{\text{Ü,HKE}} \approx 318 \Omega$	$R_{\text{Ü,VKE}} \approx 159 \Omega$	$R_{\text{Ü,Aktuell}} \approx 318 \Omega$	
$R_{\text{AG}} \approx 2,84 \Omega$	$R_{\text{GB}} \approx 5,43 \Omega$	$R_{\text{AB}} \approx 8,27 \Omega$	
$\varphi_0 \approx 31,8 \text{ kV}$	$U_{s,\text{max}} \approx 30 \text{ kV}$	$U_{\text{AB}} \approx 827 \text{ V}$	$E_{\text{max}} \approx 637 \text{ V / mm}$

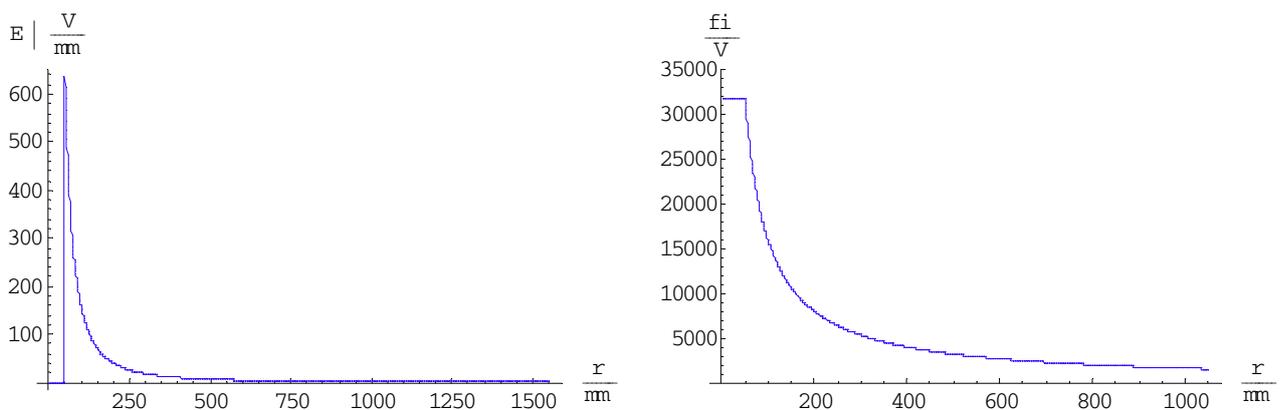


Bild LB_8.3_1: Feldstärkeverlauf (links) und Potentialverlauf (rechts) eines Halbkugelerders [r läuft vom Mittelpunkt des Erders auf der Erdoberfläche radial nach außen]

BB 8.1: Halbkugelerder (HKE) in einem geschichteten Erdreich

Gemäß Lehrbuch gelten folgende Zahlenwerte:

Geg.: $I_0 (\downarrow) = 10 \text{ kA}$; $r_0 = 20 \text{ cm}$; $s (U_{s,max}) = 80 \text{ cm}$; h (gesetzt für VKE) = 2 m

Grenzschicht (gesetzt): $r_G = 80 \text{ cm}$; $\kappa_{\text{Innen}} = 0,1 \text{ S / m}$; $\kappa_{\text{Außen}} = 0,03 \text{ S / m}$

Schrittspannung zwischen A und B (gesetzt): $r_A = 70 \text{ cm}$ und $r_B = 110 \text{ cm}$ ($s_{AB} = 40 \text{ cm}$)

Tabelle BB_8.1_1: Legende zur Tabelle BB_8.1_2 und Ausdruck der Lösungen (darunter)

Erdertyp			
$R_{\ddot{U},\text{Innen}}$ in Ω	$R_{\ddot{U},\text{Außen}}$ in Ω		
$R_{\ddot{U},\text{HKE}}$ in Ω	$R_{\ddot{U},\text{VKE}}$ in Ω	$R_{\ddot{U},\text{Aktuell}}$ in Ω	
R_{AG} in Ω	R_{GB} in Ω	R_{AB} in Ω	
φ_0 in V	$U_{s,max}$ in V	U_{AB} in V	E_{max} in V / m

HKE			
5,968	6,631		
12,6	3,979	12,6	
0,284	1,809	2,093	
125997,67	110082,17	20927,84	397,89

Tabelle BB_8.1_2: Lösungsübersicht zum BB 8.1

Rechnung stimmt !

HKE			
$R_{\ddot{U},\text{Innen}} \approx 5,97 \Omega$	$R_{\ddot{U},\text{Außen}} \approx 6,63 \Omega$		
$R_{\ddot{U},\text{HKE}} \approx 12,6 \Omega$	$R_{\ddot{U},\text{VKE}} \approx 3,98 \Omega$	$R_{\ddot{U},\text{Aktuell}} \approx 12,6 \Omega$	
$R_{AG} \approx 0,284 \Omega$	$R_{GB} \approx 1,809 \Omega$	$R_{AB} \approx 2,09 \Omega$	
$\varphi_0 \approx 126 \text{ kV}$	$U_{s,max} \approx 110 \text{ kV}$	$U_{AB} \approx 20,9 \text{ kV}$	$E_{max} \approx 398 \text{ V / mm}$

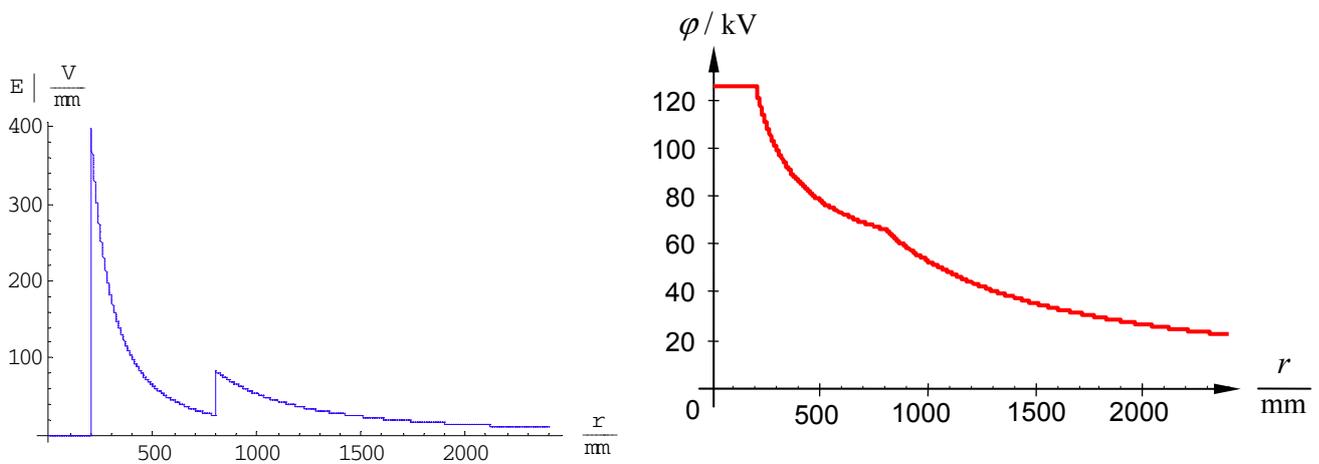


Bild BB_8.1_1: Feldstärkeverlauf (links) und Potentialverlauf (rechts) eines Halbkugelerders [r läuft vom Mittelpunkt des Erders auf der Erdoberfläche radial nach außen]

BB 8.2: Übergangswiderstand

Geg.: $I_A (\downarrow) = 50 \text{ A}$; $I_B (\uparrow) = 25 \text{ A}$; $I_C (\uparrow) = 25 \text{ A}$ (für Zusatzaufgabe gewählt)

Tabelle BB_8.2_1: Legende zur Tabelle BB_8.2_2 und Ausdruck der Lösungen (darunter)

φ_{XA} in V	φ_{XB} in V	φ_{XC} in V
$\varphi_{X,res}$ in V		
E_{XA} in V / m	E_{XB} in V / m	E_{XC} in V / m
\underline{E}_{XA} in V / m	\underline{E}_{XB} in V / m	\underline{E}_{XC} in V / m
\underline{E}_{XA} in V / m	E_{XA} in V / m	
R_{AB} in Ω	R_{AC} in Ω	R_{BC} in Ω
κ_{AB} in S / m	κ_{AC} in S / m	κ_{BC} in S / m
d in m	e in m	$R_{\bar{U}}$ in Ω

Messpunkt X
(liegt mittig auf der Verbindungslinie zwischen B und C)

14.7772	-99.4718	-99.4718
-184.167		
0.274405	24.868	24.868
0.2744	0. - 24.868 i	0. + 24.868 i
0.2744 + 0. i	0.2744	
426.166	420.483	791.796
7.4×10^{-4}	7.5×10^{-4}	$5. \times 10^{-3}$
54.	8.	27.4266

14,778	-99,472	-99,472
-184,167		
0,274	24,868	24,868
0,2744	0 - j 24,868	0 + j 24,868
0,2744 + j 0	0,2744	
426,166	420,483	791,796
$7,4 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
54	8	27,427

BB 8.3: Zylindersymmetrisches Strömungsfeld

Zur Überprüfung der allgemeinen Lösung im Lehrbuch werden folgende Zahlenwerte gewählt:

Geg.: $U_q = |U_{ia}| = 1 \text{ kV}$; $r_i = 1 \text{ cm}$; $r_a = 10 \text{ cm}$; $h = 20 \text{ cm}$; $\kappa = 10^{-2} \text{ S/m}$; $\varphi_{PB} = 0 \text{ V}$

Zur Bestimmung des Potentialverlaufes werden vier Varianten untersucht:

- A) $U_q (\downarrow)$ und Potentialbezugspunkt (PB) auf dem Innenzylinder (vgl. Lehrbuch – Bild 8.22; links)
- B) $U_q (\downarrow)$ und Potentialbezugspunkt auf dem Außenzylinder (vgl. Lehrbuch – Bild 8.22; rechts)
- C) $U_q (\uparrow)$ und Potentialbezugspunkt auf dem Innenzylinder
- D) $U_q (\uparrow)$ und Potentialbezugspunkt auf dem Außenzylinder

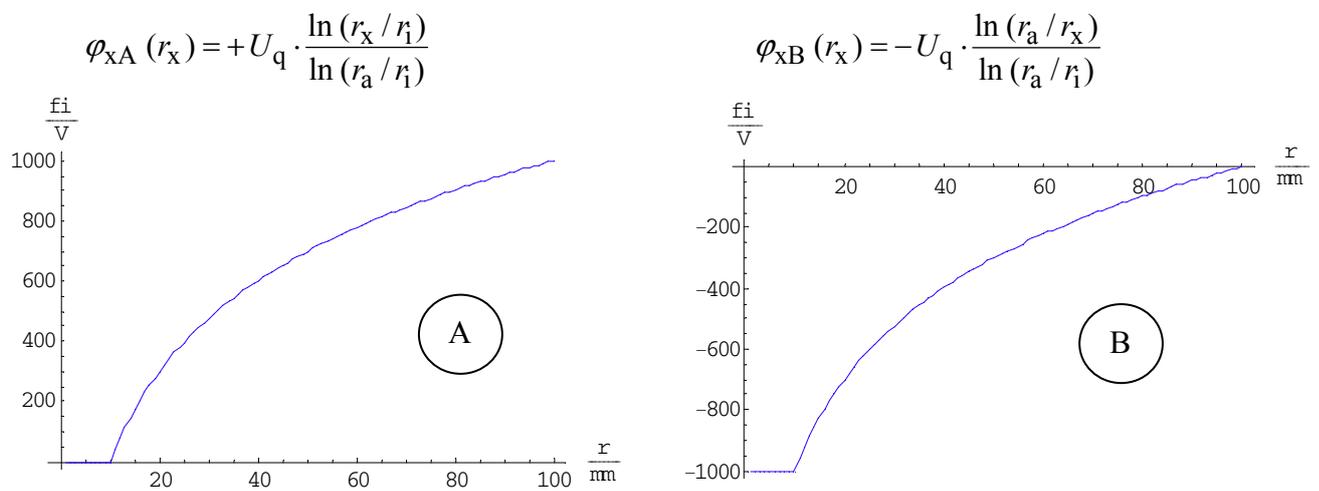


Bild BB_8.3_1: Potentialverlauf für die Variante A (links) und die Variante B (rechts)

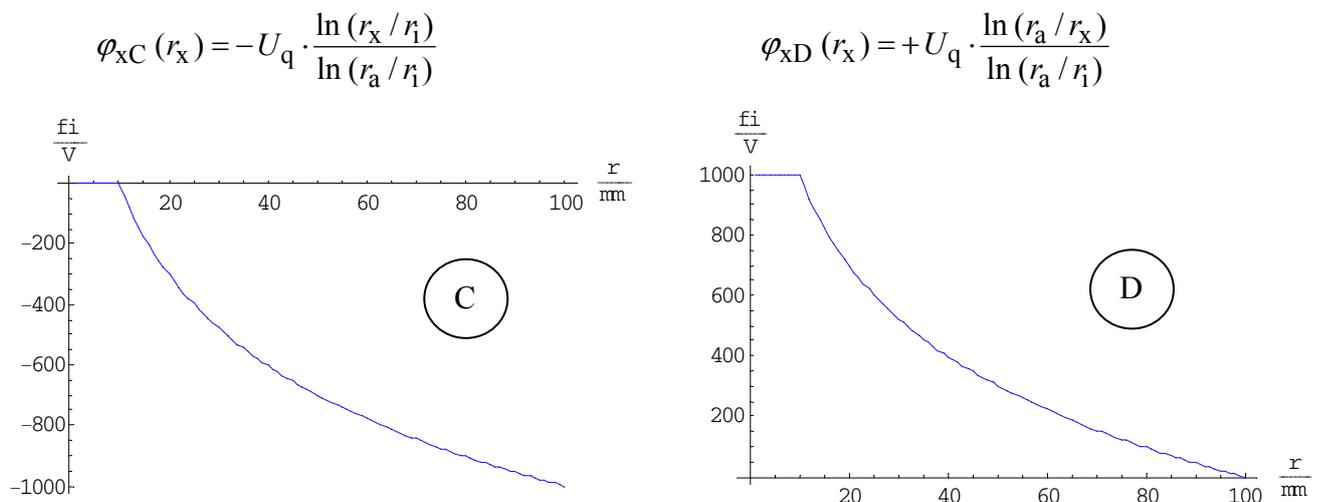


Bild BB_8.3_2: Potentialverlauf für die Variante C (links) und die Variante D (rechts)

BB 8.4: Überlagerung von Strömungsfeldern (3 Halbkugeln auf einer gemeinsamen Ebene)

Zur Überprüfung der Lösung im Lehrbuch werden die **errechneten Werte** verwendet und mit ihnen die **gegebenen Werte** der Aufgabenstellung überprüft. Für die Probe gilt:

Geg.: $I_A (\downarrow) = 50 \text{ A}$; $I_B (\uparrow) = I_C (\uparrow) = 25 \text{ A}$; $r_A = r_B = r_C = 1 \text{ mm}$; $a = 6 \text{ m}$; $\kappa = 10^{-2} \text{ S / m}$

Tabelle BB_8.4_1: Legende zur Tabelle BB_8.4_2 und darunter der Ausdruck der Lösungen

φ_{XA} in V	φ_{XB} in V	φ_{XC} in V	Messpunkt X
$\varphi_{X,res}$ in V			
E_{XA} in V / m	E_{XB} in V / m	E_{XC} in V / m	
\underline{E}_{XA} in V / m	\underline{E}_{XB} in V / m	\underline{E}_{XC} in V / m	
\underline{E}_X in V / m	E_{XA} in V / m		

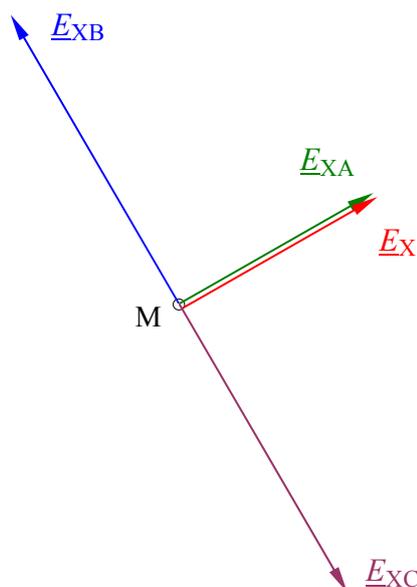
153.147	-132.629	-132.629
-112.111		
29.4731	44.2097	44.2097
$25.5245 + 14.7366 \text{ I}$	$-22.1049 + 38.2867 \text{ I}$	$22.1049 - 38.2867 \text{ I}$
$25.5245 + 14.7366 \text{ I}$	29.4731	

Tabelle BB_8.4_2: Lösungsübersicht zum BB 8.4

Rechnung stimmt !

$\varphi_{XA} = 153,1 \text{ V}$	$\varphi_{XB} = -132,6 \text{ V}$	$\varphi_{XC} = -132,6 \text{ V}$
$\varphi_{X,res} = -112,1 \text{ V}$		
$E_{XA} = 29,47 \text{ V / m}$	$E_{XB} = 44,21 \text{ V / m}$	$E_{XC} = 44,21 \text{ V / m}$
$\underline{E}_{XA} = (25,5 + j 14,7) \text{ V / m}$	$\underline{E}_{XB} = (-22,1 + j 38,3) \text{ V / m}$	$\underline{E}_{XC} = (22,1 - j 38,3) \text{ V / m}$
$\underline{E}_X = (25,5 + j 14,7) \text{ V / m}$	$E_X = 29,47 \text{ V / m}$	

• **Überprüfung durch eine grafischen Lösung** (elektrische Feldstärke im Punkt X):



Maßstab:
1 cm entspricht 10 V / m

abgelesen: $(2,6 + j 1,5) \text{ cm}$

$$\underline{E}_M \approx (26 + j15) \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\underline{E}_M \approx 30 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot e^{j30^\circ}$$

Grafische Lösung stimmt !

Bild BB_8.4_1: Überprüfung des gegebenen Messwertes im BB 8.4 durch eine grafische Lösung

BB 8.5: Überlagerung SESF (2 Kugeln auf einer gemeinsamen Ebene)
 Randbedingung: Es existieren keine Begrenzungen des Feldraumes und $\kappa = \text{const.}$

a) Gleiche Polarität: $I_B = +I_A$

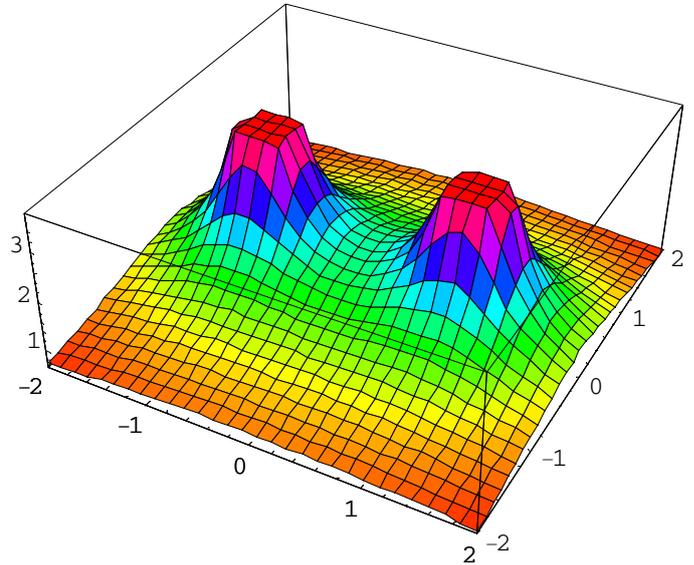
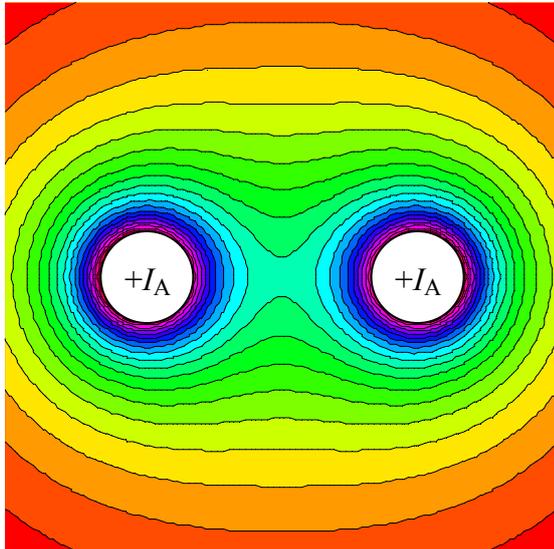


Bild BB_8.5_1: Potentialverlauf zweier Kugelquellen mit gleicher Polarität
 (links: Ebene Felddarstellung bei einem Schnitt durch den Mittelpunkt beider Kugeln;
 rechts: Potentialgebirge auf der Schnittfläche durch den Mittelpunkt beider Kugeln)

b) Ungleiche Polarität: $I_B = -I_A$

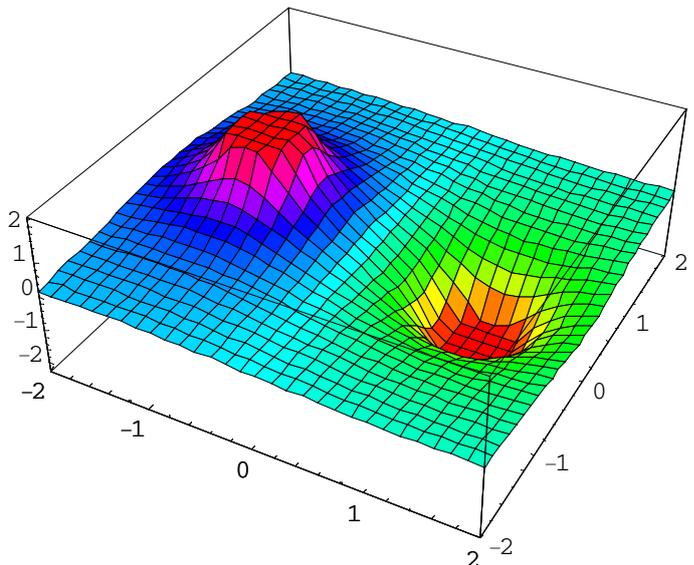
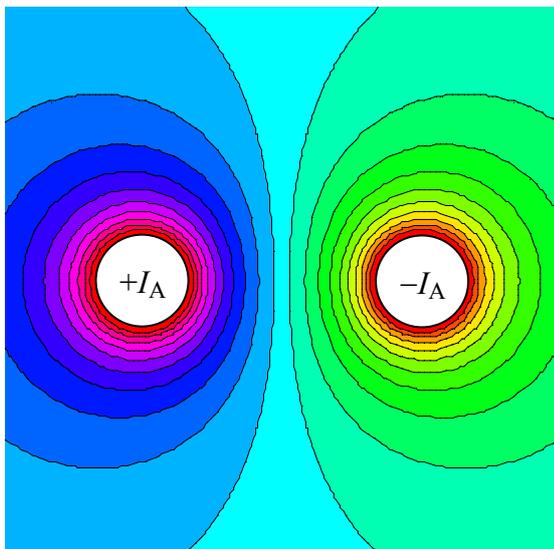


Bild BB_8.5_2: Potentialverlauf zweier Kugelquellen mit ungleicher Polarität
 (links: Ebene Felddarstellung bei einem Schnitt durch den Mittelpunkt beider Kugeln;
 rechts: Potentialgebirge auf der Schnittfläche durch den Mittelpunkt beider Kugeln)