



Probe zur Lösung der Berechnungsbeispiele BB_9.x:

Allgemeine Hinweise:

Die Lösungen der Berechnungsbeispiele 9.x wurden mit einem (für diese Zwecke selbst entwickelten) **MATHEMATICA**-Programm getestet (siehe nachfolgende Tabellen und Funktionsverläufe).

Es berechnet mit den gegebenen Daten einer zylindersymmetrischen Anordnung mit geschichtetem Dielektrikum (h ; r_0 ; r_G ; r_{PB} ; $\epsilon_r [0-G]$; $\epsilon_r [G-PB]$) und der angelegten Gesamtspannung U_0 folgende Größen und Funktionen:

Einzelwerte:

- Einzelkapazitäten bei geschichtetem Dielektrikum und resultierende Kapazität
- Teilspannungen bei geschichtetem Dielektrikum
- Eckpunkte im Feldstärkeverlauf auf einer Schnittfläche
- Gespeicherte Ladung und gespeicherte elektrische Energie
- Flächenladungsdichten auf dem Innenzylinder und auf dem Außenzylinder

Bei einem homogenen Dielektrikum gilt: $\epsilon_r [0-G] = \epsilon_r [G-PB] = \epsilon_r$

Grafische Darstellungen:

- Optimaler Innenradius für eine minimale Feldstärke auf dem Innenzylinder (für ein homogenes Dielektrikum)
- Radialer Potentialverlauf auf einer Schnittfläche (für ein homogenes oder ein geschichtetes Dielektrikum)
- Radialer Feldstärkeverlauf auf einer Schnittfläche (für ein homogenes oder ein geschichtetes Dielektrikum)

Für die Berechnung der Überlagerung radialsymmetrischer elektrostatischer Felder müssen zusätzlich die Koordinaten der als Punktladung aufgefassten Ladungen sowie die Koordinaten von zwei Messpunkten angegeben werden. Dabei gilt die Randbedingung, dass sich die Mittelpunkte aller Punktladungen und die Messpunkte auf einer gemeinsamen Ebene befinden. Alle Berechnungen werden dann für diese Schnittfläche durchgeführt (ebenes Feldbild). Der Feldraum sei unendlich groß.

In dieser ebenen Felddarstellung ist es zulässig, die Vektoren der gerichteten Feldgrößen über komplexe Zahlen (gekennzeichnet durch einen Unterstrich – ansonsten sind es die Beträge) zu beschreiben. Das vereinfacht die Berechnung erheblich.

Für die elektrische Feldstärke in einem Feldpunkt (FP) auf dieser Ebene gilt dann:

$$\vec{E}_{FP} = E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \hat{=} \operatorname{Re}\{\underline{E}_{FP}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{E}_{FP}\}$$

BB 9.1: Koaxialleitung ($r_i = 0,4 \text{ mm}$) $\leq r \leq (r_a = 4 \text{ mm})$

Für das Dielektrikum gilt: $\epsilon_r [0-G] = \epsilon_r [G-PB] = \epsilon_r$. Die Grenzschicht wurde bei $r_G = 2 \text{ mm}$ angenommen. Sie ist aber bei einem homogenen Dielektrikum unwirksam.

Tabelle BB_9.1_1: Legende zur Tabelle BB_9.1_2 und darunter der Ausdruck der Lösungen

C_{innen} in F	$C_{\text{außen}}$ in F	C_{ges} in F
U_{innen} in V	$U_{\text{außen}}$ in V	U_{ia} in V
E_{innen} in V / mm	$E_{\text{grenz,i}}$ in V / mm	
$E_{\text{grenz,a}}$ in V / mm	$E_{\text{außen}}$ in V / mm	
Q_{Ges} in As	W_{el} in Ws	
σ_{innen} in As /mm ²	$\sigma_{\text{außen}}$ in As /mm ²	
E_{ri} in V / mm	$E_{\text{ri,min}}$ in V / mm	$r_{\text{i,opt}}$ in mm

1.49324×10^{-9}	3.46719×10^{-9}	1.04373×10^{-9}
6.9897	3.0103	10
10.8574	2.17147	
2.17147	1.08574	
1.04373×10^{-8}	5.21864×10^{-8}	
2.30715×10^{-13}	2.30715×10^{-14}	
10.8574	6.79697	1.5

Tabelle BB_9.1_2: Lösungsübersicht zum BB_9.1

Rechnung stimmt !

$C_{\text{innen}} = 1,49 \text{ nF}$	$C_{\text{außen}} = 3,47 \text{ nF}$	$C_{\text{ges}} = 1044 \text{ pF}$
$U_{\text{innen}} \approx 7 \text{ V}$	$U_{\text{außen}} \approx 3 \text{ V}$	$U_{\text{ia}} = 10 \text{ V}$
$E_{\text{innen}} = 10,86 \text{ V / mm}$	$E_{\text{grenz,i}} = 2,17 \text{ V / mm}$	
$E_{\text{grenz,a}} = 2,17 \text{ V / mm}$	$E_{\text{außen}} = 1,09 \text{ V / mm}$	
$Q_{\text{Ges}} = 10,44 \text{ nAs}$	$W_{\text{el}} = 52,19 \text{ nWs}$	
$\sigma_{\text{innen}} \approx 0,23 \text{ pAs / mm}^2$	$\sigma_{\text{außen}} \approx 0,023 \text{ pAs / mm}^2$	
$E_{\text{ri}} \approx 10,86 \text{ V / mm}$	$E_{\text{ri,min}} \approx 6,8 \text{ V / mm}$	$r_{\text{i,opt}} \approx 1,5 \text{ mm}$

Für $r_{\text{i,opt}}$ gilt: Pixelgenauigkeit: $\pm 0,05 \text{ mm}$

Probe mit der Lösung von BB 9.3: $r_{\text{i,opt}} = r_a / e = 4 \text{ mm} / 2,7183 = 1,472 \text{ mm}$

• Funktionsdarstellungen zum BB 9.1:

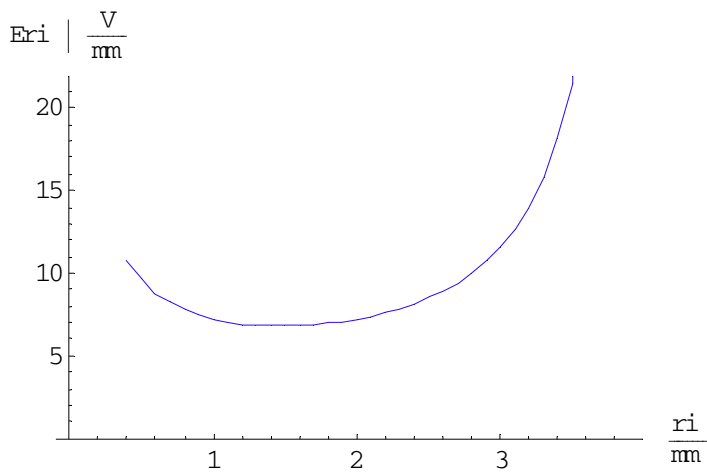


Bild 9.1_1: Verlauf der Feldstärke auf der Oberfläche des Innenzylinders bei Variation des Innenradius von r_{i0} bis r_a (Berechnungsbeispiel 9.1)

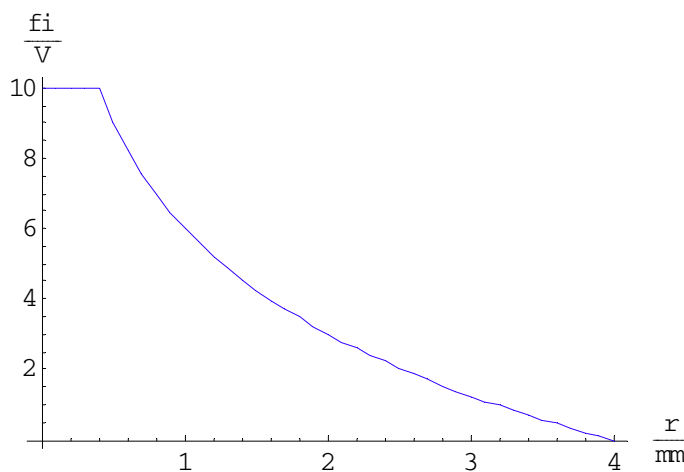


Bild 9.1_2: Verlauf des Potentials vom Innenzylinder zum Außenzylinder (Berechnungsbeispiel 9.1)

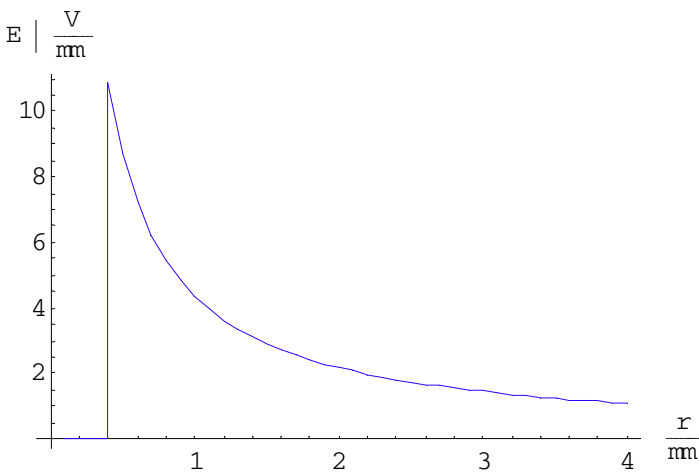


Bild 9.1_3: Verlauf der Feldstärke vom Innenzylinder zum Außenzylinder (Berechnungsbeispiel 9.1)

BB 9.2: Zylinderkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

$$(r_1 = 10 \text{ mm}) \leq r \leq (r_3 = 70 \text{ mm})$$

Für das Dielektrikum gilt: $\epsilon_r [12] = 20$ und $\epsilon_r [23] = 2$.

Die Grenzsicht wurde bei $r_2 = 50 \text{ mm}$ angenommen. Sie wäre bei einem homogenen Dielektrikum unwirksam. Dazu müsste man $\epsilon_r [12] = \epsilon_r [23] = \langle \epsilon_r - \text{Wert} \rangle$ setzen.

Zur Bestimmung von $E_{ri, \min}$ und $r_{i, \text{opt}}$ muss mit einem homogenen Dielektrikum gearbeitet werden.

Tabelle BB_9.2_1: Legende zur Tabelle BB_9.2_2 und darunter der Ausdruck der Lösungen

C_{innen} in F	$C_{\text{außen}}$ in F	C_{ges} in F
U_{innen} in V	$U_{\text{außen}}$ in V	U_{ia} in V
E_{innen} in V / mm	$E_{\text{grenz,i}}$ in V / mm	
$E_{\text{grenz,a}}$ in V / mm	$E_{\text{außen}}$ in V / mm	
Q_{Ges} in As	W_{el} in Ws	
σ_{innen} in As /mm ²	$\sigma_{\text{außen}}$ in As /mm ²	
E_{ri} in V / mm	$E_{ri, \min}$ in V / mm	$r_{i, \text{opt}}$ in mm

1.03697×10^{-9}	4.96011×10^{-10}	3.35522×10^{-10}
32356.	67644.	100000
2010.39	402.078	
4020.78	2871.99	
0.0000335522	1.67761	
3.56×10^{-10}	5.08571×10^{-11}	
5138.98	3883.4	26

Rechnung stimmt !

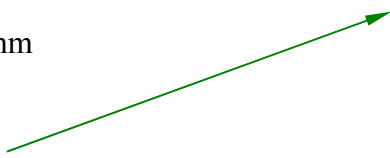
Tabelle BB_9.2_2: Lösungsübersicht zum BB 9.2

$C_{\text{innen}} = 1,04 \text{ nF}$	$C_{\text{außen}} = 496 \text{ pF}$	$C_{\text{ges}} = 335,5 \text{ pF}$
$U_{\text{innen}} = 32356 \text{ V}$	$U_{\text{außen}} = 67644 \text{ V}$	$U_{\text{ia}} = 100 \text{ kV}$
$E_{\text{innen}} = 2010 \text{ V / mm}$	$E_{\text{grenz,i}} = 402 \text{ V / mm}$	
$E_{\text{grenz,a}} = 4020 \text{ V / mm}$	$E_{\text{außen}} = 2872 \text{ V / mm}$	
$Q_{\text{Ges}} = 33,55 \text{ } \mu\text{As}$	$W_{\text{el}} = 1677,6 \text{ mWs}$	
$\sigma_{\text{innen}} \approx 356 \text{ pAs / mm}^2$	$\sigma_{\text{außen}} \approx 50,86 \text{ pAs / mm}^2$	
$E_{ri} \approx 5139 \text{ V / mm}$	$E_{ri, \min} \approx 3883 \text{ V / mm}$	$r_{i, \text{opt}} \approx 26 \text{ mm}$

Für $r_{i, \text{opt}}$ gilt: Pixelgenauigkeit: $\pm 0,5 \text{ mm}$

Probe mit der Lösung von BB 9.3:

$$r_{i, \text{opt}} = r_a / e = 70 \text{ mm} / 2,7183 = 25,75 \text{ mm}$$



• Funktionsdarstellungen zum BB 9.2:

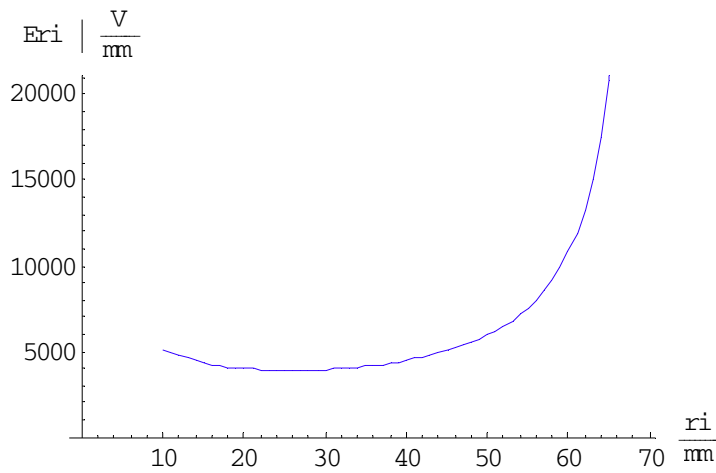


Bild 9.2_1: Verlauf der Feldstärke auf der Oberfläche des Innenzylinders bei Variation des Innenradius von r_{i0} bis r_a (Berechnungsbeispiel 9.2)

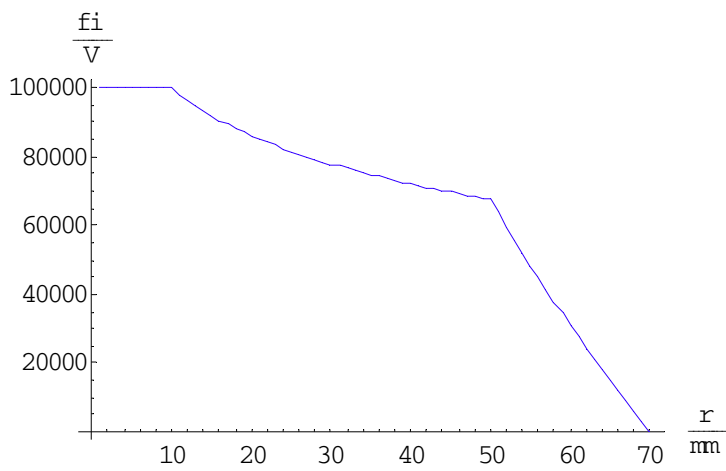


Bild 9.2_2: Verlauf des Potentials vom Innenzylinder zum Außenzylinder (Berechnungsbeispiel 9.2)

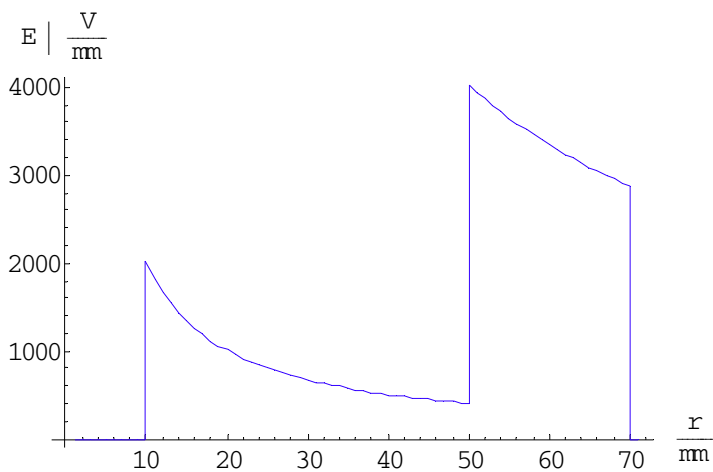


Bild 9.2_3: Verlauf der Feldstärke vom Innenzylinder zum Außenzylinder (Berechnungsbeispiel 9.2)

BB 9.3: Optimaler Innenradius eines Zylinderkondensators

$$(r_{i0} = 1 \text{ mm}) \leq r_i \leq (r_a = 100 \text{ mm})$$

Für das Dielektrikum gilt: $\epsilon_r = \text{const.}$ Geg.: $U_{ia} = 100 \text{ V}$ und $\epsilon_r = 1$

Die Grenzschicht wurde bei $r_G = 50 \text{ mm}$ angenommen.

Sie ist aber bei einem homogenen Dielektrikum unwirksam.

Tabelle BB_9.3_1: Legende zur Tabelle BB_9.3_2 und darunter der Ausdruck der Lösungen

C_{innen} in F	$C_{\text{außen}}$ in F	C_{ges} in F
U_{innen} in V	$U_{\text{außen}}$ in V	U_{ia} in V
E_{innen} in V / mm	$E_{\text{grenz,i}}$ in V / mm	
$E_{\text{grenz,a}}$ in V / mm	$E_{\text{außen}}$ in V / mm	
Q_{Ges} in As	W_{el} in Ws	
σ_{innen} in As /mm ²	$\sigma_{\text{außen}}$ in As /mm ²	
E_{ri} in V / mm	$E_{ri,\text{min}}$ in V / mm	$r_{i,\text{opt}}$ in mm

1.42206×10^{-11}	8.0259×10^{-11}	1.20802×10^{-11}
84.9485	15.0515	100
21.7147	0.434294	
0.434294	0.217147	
1.20802×10^{-9}	6.04009×10^{-8}	
1.92262×10^{-13}	1.92262×10^{-15}	
21.7147	2.7183	37

Rechnung stimmt !

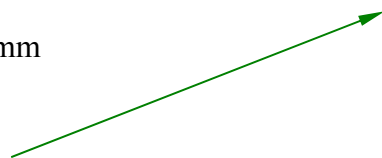
Tabelle BB_9.3_2: Lösungsübersicht zum BB 9.3

$C_{\text{innen}} = 14,2 \text{ pF}$	$C_{\text{außen}} = 80,3 \text{ pF}$	$C_{\text{ges}} = 12,08 \text{ pF}$
$U_{\text{innen}} \approx 85 \text{ V}$	$U_{\text{außen}} \approx 15 \text{ V}$	$U_{ia} = 100 \text{ V}$
$E_{\text{innen}} = 21,71 \text{ V / mm}$	$E_{\text{grenz,i}} = 0,43 \text{ V / mm}$	
$E_{\text{grenz,a}} = 0,43 \text{ V / mm}$	$E_{\text{außen}} = 0,22 \text{ V / mm}$	
$Q_{\text{Ges}} = 1,21 \text{ nAs}$	$W_{\text{el}} = 60,4 \text{ nWs}$	
$\sigma_{\text{innen}} \approx 0,19 \text{ pAs / mm}^2$	$\sigma_{\text{außen}} \approx 0,0019 \text{ pAs / mm}^2$	
$E_{ri} \approx 21,71 \text{ V / mm}$	$E_{ri,\text{min}} \approx 2,72 \text{ V / mm}$	$r_{i,\text{opt}} \approx 37 \text{ mm}$

Für $r_{i,\text{opt}}$ gilt: Pixelgenauigkeit: $\pm 0,5 \text{ mm}$

Probe mit der Lösung von BB 9.3:

$$r_{i,\text{opt}} = r_a / e = 100 \text{ mm} / 2,7183 = 36,79 \text{ mm}$$



• Funktionsdarstellungen zum BB 9.3:

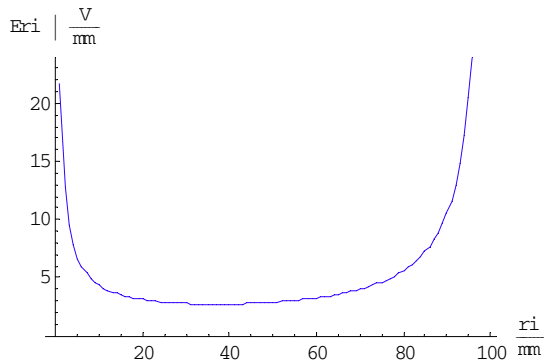


Bild 9.3_1: Verlauf der Feldstärke auf der Oberfläche des Innenzylinders bei Variation des Innenradius von r_{i0} bis r_a (Berechnungsbeispiel 9.3)

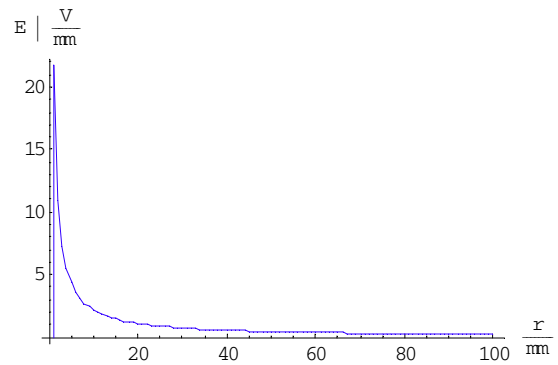
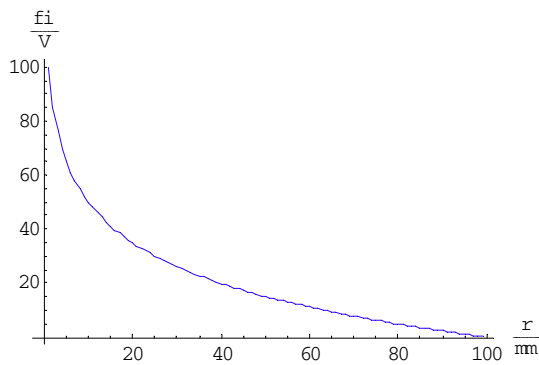


Bild BB_9.3_2: Verlauf des Potentials (links) und der elektrischen Feldstärke (rechts) vom Innenzylinder zum Außenzylinder mit einem festen Innenradius $r_{i0} = 1$ mm

Anmerkung: Falls Sie kein leistungsfähiges Grafikprogramm besitzen bzw. falls Sie eine zu PSPICE vergleichbare Grafikedarstellung wünschen, können Sie den jeweiligen Funktionsverlauf auch mit PSPICE erzeugen. Dazu stellen Sie eine durch den Koordinatenursprung verlaufende Gerade im ersten Quadranten dar (z.B. die I - U -Kennlinie eines ohmschen Widerstandes) und geben dann in der Trace-Expression-Zeile des PROBE-Fensters die darzustellende Funktionsbeschreibung ein.

Für den Feldstärkeverlauf gemäß Bild BB_9.3_1 würde dann gelten:

Trace-Expression-Zeile : $100/(V_Uq*LOG(100/V_Uq))$

Bild BB_9.3_3 zeigt das so erzeugte Simulationsergebnis (Blau: nachträglich eingefügt).

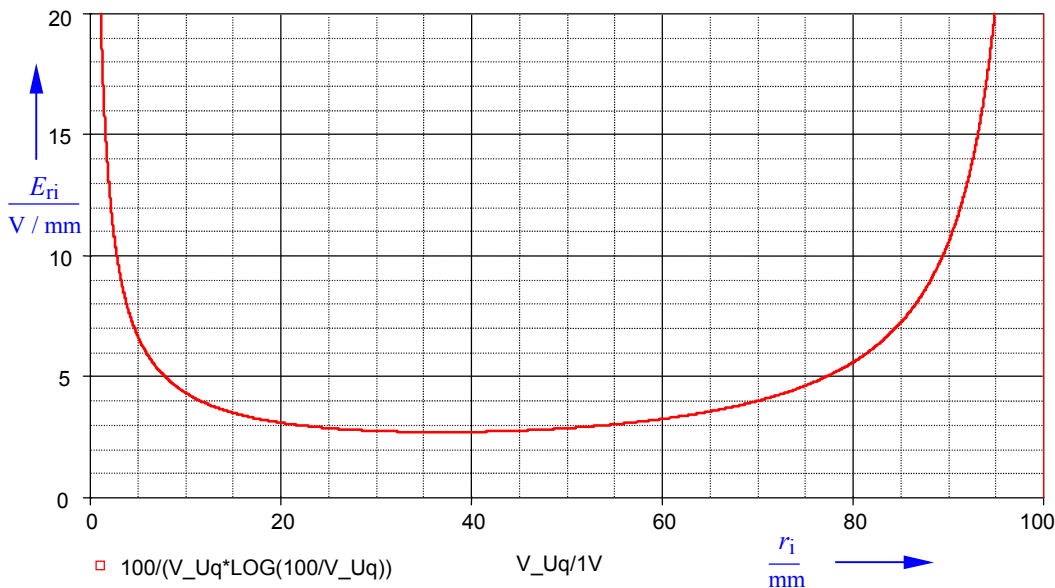


Bild 9.3_3: Mit PSPICE simulierter Funktionsverlauf zum Berechnungsbeispiel 9.3 (vgl. Bild BB_9.3_1)

BB 9.4: Überlagerung ESF (Wirkung von 3 Punktladungen auf einer gemeinsamen Ebene)
Randbedingung: Es existieren keine Begrenzungen des Feldraumes und $\epsilon = \epsilon_0$.

Tabelle BB_9.4_1: Legende zur Tabelle BB_9.4_2 und darunter der Ausdruck der Lösungen

φ_{XA} in V	φ_{XB} in V	φ_{XC} in V	Messpunkt X
$\varphi_{X,res}$ in V			
E_{XA} in V / m	E_{XB} in V / m	E_{XC} in V / m	
\underline{E}_{XA} in V / m	\underline{E}_{XB} in V / m	\underline{E}_{XC} in V / m	
\underline{E}_{XA} in V / m	E_{XA} in V / m		Messpunkt M
E_{MA} in V / m	E_{MB} in V / m	E_{MC} in V / m	
\underline{E}_{MA} in V / m	\underline{E}_{MB} in V / m	\underline{E}_{MC} in V / m	
\underline{E}_{MA} in V / m	E_{MA} in V / m		

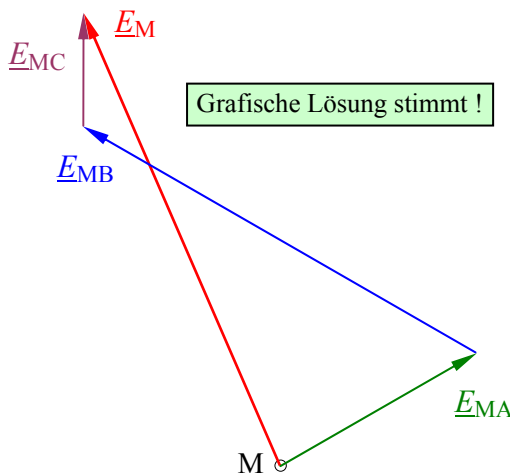
200.	400.	- 57.735
542.265		
400.	800.	- 66.6667
400.	- 800.	- 4.08202 × 10 ⁻¹⁵ + 66.6667 I
- 400. + 66.6667 I	405.518	
300.	600.	- 150.
259.808 + 150. I	- 519.615 + 300. I	- 9.18455 × 10 ⁻¹⁵ + 150. I
- 259.808 + 600. I	653.835	

Tabelle BB_9.4_2: Lösungsübersicht zum BB 9.4

Rechnung stimmt !

$\varphi_{XA} = 200$ V	$\varphi_{XB} = 400$ V	$\varphi_{XC} = - 57,735$ V
$\varphi_{X,res} = 542,265$ V		
$E_{XA} = 400$ V / m	$E_{XB} = 800$ V / m	$E_{XC} = 66,67$ V / m
$\underline{E}_{XA} = (400 + j 0)$ V / m	$\underline{E}_{XB} = (- 800 + j 0)$ V / m	$\underline{E}_{XC} = (0 + j 66,67)$ V / m
$\underline{E}_X = (- 400 + j 66,67)$ V / m	$E_X = 405,52$ V / m	
$E_{MA} = 300$ V / m	$E_{MB} = 600$ V / m	$E_{MC} = 150$ V / m
$\underline{E}_{MA} = (259,81 + j 150)$ V / m	$\underline{E}_{MB} = (- 519,62 + j 300)$ V / m	$\underline{E}_{MC} = (0 + j 150)$ V / m
$\underline{E}_M = (- 259,81 + j 600)$ V / m	$E_M = 653,84$ V / m	

• **Überprüfung der grafischen Lösung** (elektrische Feldstärke im Punkt M):



Grafische Lösung stimmt !

Maßstab:
1 cm entspricht 100 V / m

abgelesen: (- 2,6 + j 6) cm

$$\underline{E}_M \approx (-260 + j600) \frac{V}{m}$$

$$\underline{E}_M \approx 654 \frac{V}{m} \cdot e^{j113^\circ}$$

Bild BB_9.4_1: Überprüfung der grafischen Lösung zum BB 9.4

BB 9.5: Energiebetrachtungen

Zur Überprüfung der allgemeinen Lösung im Lehrbuch werden folgende Zahlenwerte (in Anlehnung an das Bild 10.18 und das Lehrbeispiel 10.5) gewählt:

Geg.: $C_1 = 1 \mu\text{F}$ mit $U_{10} (\downarrow) = 10 \text{ V}$; $C_2 = 4 \mu\text{F}$ mit $U_{20} (\downarrow) = 20 \text{ V}$; $R = 0 \Omega$

Bild 9.5_1 zeigt die in PSPICE verwendete Simulationsschaltung.

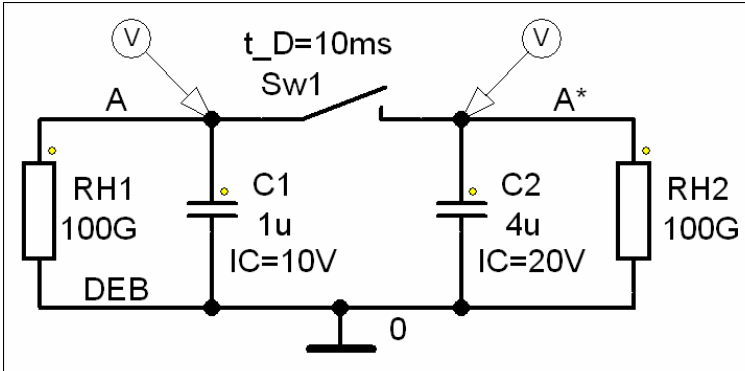


Bild 9.5_1: Simulationsschaltung zum Berechnungsbeispiel 9.5

Zur Bestimmung der resultierenden Spannung über beiden Kondensatoren im Ergebnis des Vorgangs y dient die Gleich. (10.28). Dabei ist zu beachten, dass die Vorladespannung U_{10} im Vergleich zu U_{X0} [vgl. Herleitung (10.28)] eine entgegengesetzte Richtung aufweist (\Rightarrow negatives Vorzeichen).

$$(10.28): \quad U_{AE\infty} = \frac{C_Y \cdot U_{Y0} - C_X \cdot U_{X0}}{C_X + C_Y}$$

$$U_{AE\infty} = \frac{C_2 \cdot U_{20} - C_1 \cdot U_{10}}{C_1 + C_2} = \frac{4 \mu\text{F} \cdot 20 \text{ V} - 1 \mu\text{F} \cdot (-10 \text{ V})}{5 \mu\text{F}} = 18 \text{ V}$$

Bild 9.5_2 zeigt das Simulationsergebnis (Rot: nachträglich eingefügt).

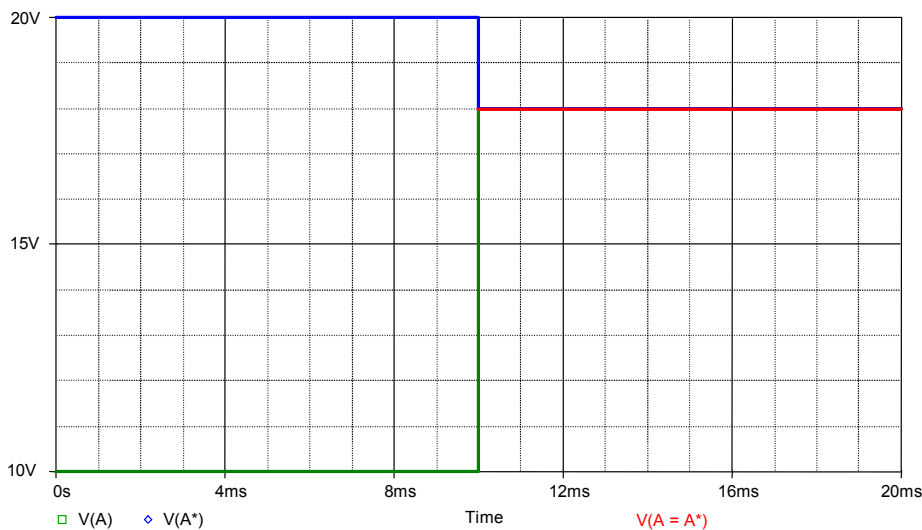


Bild 9.5_2: Simulationsergebnis zum Berechnungsbeispiel 9.5

• **Überprüfung der Ergebnisse:**

In der nachfolgenden Tabelle werden ausgewählte Ergebnisse einer mit dem **MATHEMATICA**-Programm durchgeführten Berechnung dargestellt.

Tabelle BB_9.5_1: Legende zur Tabelle BB_9.5_2 und Ausdruck der Lösungen (darunter)

Q_{10} in μAs	Q_{20} in μAs	$Q_{\text{ges}0}$ in μAs	
$W_{\text{el},10}$ in μWs	$W_{\text{el},20}$ in μWs		
W_x in μWs	W_y in μWs	ΔW in μWs	ΔW_{Probe} in μWs
U_{10} in V	U_{20} in V	$U_{\text{AE}\infty}$ in V	

-10	80	70	
50.	800.		
850.	810.	40.	40
-10	20	18	

Tabelle BB_9.5_2: Lösungsübersicht zum BB 9.5

Rechnung stimmt für die angenommenen Zahlenwerte!

$Q_{10} = -10 \mu\text{As}$	$Q_{20} = 80 \mu\text{As}$	$Q_{\text{ges}0} = 70 \mu\text{As}$
$W_{\text{el},10} = 50 \mu\text{Ws}$	$W_{\text{el},20} = 800 \mu\text{Ws}$	
$W_x = 850 \mu\text{Ws}$	$W_y = 810 \mu\text{Ws}$	$\Delta W = 40 \mu\text{Ws}$
$U_{10} = -10 \text{ V}$	$U_{20} = 20 \text{ V}$	$U_{\text{AE}\infty} = 18 \text{ V}$

• Ergebnis des Vorgangs x:

$$W_x = W_{10} + W_{20} = \frac{C_1 \cdot U_{10}^2}{2} + \frac{C_2 \cdot U_{20}^2}{2} = 50 \mu\text{W} \cdot \text{s} + 800 \mu\text{W} \cdot \text{s} = 850 \mu\text{W} \cdot \text{s}$$

• Ergebnis des Vorgangs y:

$$W_y = \frac{C_{\text{ges},y} \cdot U_{\text{AE}\infty}^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) \cdot U_{\text{AE}\infty}^2}{2} = 810 \mu\text{W} \cdot \text{s}$$

• Energiedifferenz:

$$\Delta W = W_x - W_y = (850 - 810) \mu\text{W} \cdot \text{s} = 40 \mu\text{W} \cdot \text{s}$$

• Energiedifferenz (vgl. Lehrbuch):

$$\Delta W = \frac{(Q_1 \cdot C_2 - Q_2 \cdot C_1)^2}{2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot (C_1 + C_2)} = \frac{(10 \mu\text{As} \cdot 4 \mu\text{F} - 80 \mu\text{As} \cdot 1 \mu\text{F})^2}{2 \cdot 1 \mu\text{F} \cdot 4 \mu\text{F} \cdot 5 \mu\text{F}} = 40 \mu\text{W} \cdot \text{s}$$

Anmerkung: Q_1 muss hier positiv angesetzt werden, weil die Vorladungen im BB 9.5 mit jeweils gleichem Vorzeichen angegeben wurden.