

**Lösung der Übungsaufgabe ÜA\_3\_14.4.A:**

a) **Berechnung der Eingrabbtiefe** über das Potential mit Gleich. (14.14):

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi \cdot \kappa \cdot r}$$

$$\varphi_x = \varphi_{x1E} + \varphi_{x1S} + \varphi_{x2E} + \varphi_{x2S} = 2 (\varphi_{x1} + \varphi_{x2})$$

Geg.:  $I_1 = -I_2 = I = 500 \text{ A}$       und:  $\varphi_x = -1000 \text{ V}$

$$\varphi_x = \frac{2I}{4\pi \cdot \kappa} \left( \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 4h_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + h_1^2}} \right) = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa} \left( \frac{1}{h_1\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + (3\text{m})^2}} \right)$$

$$\frac{2\pi \cdot \kappa \cdot \varphi_x}{I} - \frac{1}{h_1\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{h_2^2 + 9\text{m}^2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2\pi \cdot \kappa \cdot \varphi_x}{I} + \frac{1}{h_1\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + 9\text{m}^2}}$$

$$\left( 4\pi \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{m}} + 0,1491 \frac{1}{\text{m}} \right)^2 = \frac{1}{h_2^2 + 9\text{m}^2} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \sqrt{13,246 - 9} \text{ m} = 2,06 \text{ m}$$

b) **Bestimmung der Feldstärkekomponenten** über Gleich. (14.14):

$$E(r) = \frac{I}{4\pi \cdot \kappa \cdot r^2}$$

$$E_{21E} = \frac{I_1}{4\pi \cdot \kappa \cdot \left( \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2} \right)^2} = \frac{I}{4\pi \cdot \kappa \cdot h_1^2 \cdot 9,25}$$

$$E_{21S} = \frac{I_1}{4\pi \cdot \kappa \cdot \left( \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2} \right)^2} = \frac{I}{4\pi \cdot \kappa \cdot h_1^2 \cdot 11,25}$$

*Hinweis:* Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:  
 Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 14.6 bis 14.8.

**Zusatzaufgabe:**

Berechnen Sie das resultierende Potential  $\varphi_x$ , wenn der Vollkugelerder E2 durch einen Halbkugelerder H2 ersetzt wird.

Geg.:  $\kappa_{\text{Erde}} = 10^{-2} \text{ S/m}$ ;  $r_{01} = r_{02} \ll d$  (Punktquellen);  $h_1 = 3 \text{ m}$ ;  $d = 9 \text{ m}$  und  $I_{01} = -I_{02} = I = 500 \text{ A}$ .

Lösung:

$$\varphi_x = \varphi_{x1E} + \varphi_{x1S} + \varphi_{x2H} = 2\varphi_{x1} + \varphi_{x2} = \varphi_x(\text{E1}) + \varphi_x(\text{H2}) \quad (\text{Überlagerungssatz})$$

Am Beitrag des Erders E1 ändert sich nichts.

$$\varphi_x(\text{E1}) = \frac{2I}{4\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 4h_1^2}} = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{h_1\sqrt{5}} = \frac{500}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 3\sqrt{5}} \text{ V} = 1186,27 \text{ V}$$

Der Beitrag des Halbkugelerders H2 ändert sich gegenüber dem Beitrag von E2 wie folgt:

$$\varphi_x(\text{H2}) = \frac{-I}{2\pi \cdot \kappa \cdot 0,3d} = \frac{-500}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 3} \text{ V} = -2652,58 \text{ V}$$

$$\varphi_x = \varphi_x(\text{E1}) + \varphi_x(\text{H2}) = 1186,27 \text{ V} - 2652,58 \text{ V} = -1466,3 \text{ V}$$

Wir wollen den Zahlenwert des Potentialbeitrages des Erdes E2 über die Lösung zur originalen Aufgabenstellung zum Vergleich mit  $\varphi_x(\text{H2})$  berechnen. Es gilt die berechnete Eingrabbtiefe:  $h_2 \approx 2,06 \text{ m}$ .

$$\varphi_x(\text{E2}) = \frac{-2I}{4\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + h_1^2}} = \frac{-I}{2\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + h_1^2}} = \frac{-500}{2\pi \cdot 10^{-2} \sqrt{4,244 + 9}} \text{ V} = -2186,49 \text{ V}$$

Damit gelingt uns zugleich die Probe zur Lösung der originalen Aufgabenstellung:

$$\varphi_x = \varphi_x(\text{E1}) + \varphi_x(\text{E2}) = 1186,27 \text{ V} - 2186,49 \text{ V} \approx -1000 \text{ V} \quad (\text{stimmt!})$$

• **Vergleich**  $\varphi_x(\text{E2})$  und  $\varphi_x(\text{H2})$ :

Der Potentialbeitrag des Erders 2 (egal, ob Voll- oder Halbkugel) ist infolge  $I_{02} = -I$  immer negativ.

$$\Delta\varphi_x = \varphi_x(\text{E2}) - \varphi_x(\text{H2}) = -2186,49 \text{ V} - (-2652,58 \text{ V}) \approx -466 \text{ V}$$

Die Abweichung von betragsmäßig 466 V kommt durch die veränderte Erderkonfiguration zustande.

Der Halbkugelerder hat einen geringeren Abstand zum Punkt  $x$  ( $h_1 = 0,3d = 3 \text{ m}$ ) im Vergleich zur resultierenden Distanz des Vollkugelerders zum Punkt  $x$  ( $\sqrt{h_2^2 + h_1^2} \approx 3,6 \text{ m}$ ).

Infolge der geringeren Distanz erzeugt der Halbkugelerder einen größeren negativen Potentialbeitrag.

Ende der zusätzlichen Lösung