Lösung der Übungsaufgabe ÜA_3_14.4.A:

09.09.2022

a) **Berechnung der Eingrabtiefe** über das Potential mit Gleich. (14.14):

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa\cdot r}$$

$$\varphi_\mathrm{x} = \varphi_\mathrm{x1E} + \varphi_\mathrm{x1S} + \varphi_\mathrm{x2E} + \varphi_\mathrm{x2S} = 2\left(\varphi_\mathrm{x1} + \varphi_\mathrm{x2}\right)$$

Geg.: $I_1 = -I_2 = I = 500\ \mathrm{A}$ und: $\varphi_\mathrm{x} = -1000\ \mathrm{V}$

$$\varphi_\mathrm{x} = \frac{2I}{4\pi\cdot\kappa}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 4h_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + h_1^2}}\right) = \frac{I}{2\pi\cdot\kappa}\left(\frac{1}{h_1\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + (3\mathrm{m})^2}}\right)$$

$$\frac{2\pi\cdot\kappa\cdot\varphi_\mathrm{x}}{I} - \frac{1}{h_1\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{h_2^2 + 9\mathrm{m}^2}} \quad\Rightarrow\quad -\frac{2\pi\cdot\kappa\cdot\varphi_\mathrm{x}}{I} + \frac{1}{h_1\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + 9\mathrm{m}^2}}$$

$$\left(4\pi\cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\mathrm{m}} + 0{,}1491\,\frac{1}{\mathrm{m}}\right)^2 = \frac{1}{h_2^2 + 9\mathrm{m}^2} \quad\Rightarrow\quad h_2 = \sqrt{13{,}246 - 9}\ \mathrm{m} = 2{,}06\,\mathrm{m}$$

---

b) **Bestimmung der Feldstärkekomponenten** über Gleich. (14.14):

$$E(r) = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa\cdot r^2}$$

$$E_\mathrm{21E} = \frac{I_1}{4\pi\cdot\kappa\cdot\left(\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2}\right)^2} = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa\cdot h_1^2\cdot 9{,}25}$$

$$E_\mathrm{21S} = \frac{I_1}{4\pi\cdot\kappa\cdot\left(\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}\right)^2} = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa\cdot h_1^2\cdot 11{,}25}$$

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 14.6 bis 14.8.

Zusatzaufgabe:

Berechnen Sie das resultierende Potential φ_x, wenn der Vollkugelerder E2 durch einen Halbkugelerder H2 ersetzt wird.
Geg.: $\kappa_{\text{Erde}} = 10^{-2}$ S / m; $r_{01} = r_{02} << d$ (Punktquellen); $h_1 = 3$ m; $d = 9$ m und $I_{01} = -I_{02} = I = 500$ A.

Lösung:

$\varphi_x = \varphi_{x1E} + \varphi_{x1S} + \varphi_{x2H} = 2\varphi_{x1} + \varphi_{x2} = \varphi_x(\text{E1}) + \varphi_x(\text{H2})$ (Überlagerungssatz)

Am Beitrag des Erders E1 ändert sich nichts.

$$\varphi_x(\text{E1}) = \frac{2I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_1^2+4h_1^2}} = \frac{I}{2\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{1}{h_1\sqrt{5}} = \frac{500}{2\pi\cdot 10^{-2}\cdot 3\sqrt{5}}\,\text{V} = 1186{,}27\,\text{V}$$

Der Beitrag des Halbkugelerders H2 ändert sich gegenüber dem Beitrag von E2 wie folgt:

$$\varphi_x(\text{H2}) = \frac{-I}{2\pi\cdot\kappa\cdot 0{,}\overline{3}d} = \frac{-500}{2\pi\cdot 10^{-2}\cdot 3}\,\text{V} = -2652{,}58\,\text{V}$$

$$\varphi_x = \varphi_x(\text{E1}) + \varphi_x(\text{H2}) = 1186{,}27\,\text{V} - 2652{,}58\,\text{V} = -1466{,}3\,\text{V}$$

Wir wollen den Zahlenwert des Potentialbeitrages des Erdes E2 über die Lösung zur originalen Aufgabenstellung zum Vergleich mit $\varphi_x(\text{H2})$ berechnen. Es gilt die berechnete Eingrabtiefe: $h_2 \approx 2{,}06$ m.

$$\varphi_x(\text{E2}) = \frac{-2I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_2^2+h_1^2}} = \frac{-I}{2\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_2^2+h_1^2}} = \frac{-500}{2\pi\cdot 10^{-2}\sqrt{4{,}244+9}}\,\text{V} = -2186{,}49\,\text{V}$$

Damit gelingt uns zugleich die Probe zur Lösung der originalen Aufgabenstellung:

$\varphi_x = \varphi_x(\text{E1}) + \varphi_x(\text{E2}) = 1186{,}27\,\text{V} - 2186{,}49\,\text{V} \approx -1000\,\text{V}$ (stimmt!)

- **Vergleich** $\varphi_x(\text{E2})$ und $\varphi_x(\text{H2})$:

Der Potentialbeitrag des Erders 2 (egal, ob Voll- oder Halbkugel) ist infolge $I_{02} = -I$ immer negativ.

$$\Delta\varphi_x = \varphi_x(\text{E2}) - \varphi_x(\text{H2}) = -2186{,}49\,\text{V} - (-2652{,}58\,\text{V}) \approx -466\,\text{V}$$

Die Abweichung von betragsmäßig 466 V kommt durch die veränderte Erderkonfiguration zustande. Der Halbkugelerder hat einen geringeren Abstand zum Punkt *x* ($h_1 = 0{,}\overline{3}d = 3$ m) im Vergleich zur resultierenden Distanz des Vollkugelerders zum Punkt *x* ($\sqrt{h_2^2+h_1^2} \approx 3{,}6$ m).

Infolge der geringeren Distanz erzeugt der Halbkugelerder einen größeren negativen Potentialbeitrag.

Ende der zusätzlichen Lösung