

Aufgabenstellung zu ÜA_3_14.4.D:

09.09.2022

ÜA_3_14.4.D: Leiten Sie eine allgemeine Berechnungsvorschrift für den Betrag der resultierenden elektrischen Feldstärke eines Vollkugelerders her und diskutieren Sie den Verlauf der Schrittspannung für mehrere Anfangsstandorte und Bewegungsrichtungen.

- a) Berechnen Sie den Verlauf des elektrischen Potential auf einer Linie, die von der Eingrabstelle x_0 radial nach außen verläuft und leiten Sie eine allgemeine Berechnungsvorschrift für den Betrag der resultierenden elektrischen Feldstärke eines Vollkugelerders her.
- b) Bestimmen Sie die Lage des Maximums des Betrages der elektrischen Feldstärke auf dieser Linie.

Zusatzaufgabe:

- c) Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf der Schrittspannung für verschiedene Start-Standpunkte und verschiedene Bewegungsrichtungen eines Läufers als Funktion des Ortes auf der Erdoberfläche. Für den jeweiligen Standort auf der Erdoberfläche gilt: $(x_0 - 5 \text{ m}) \leq x \leq (x_0 + 5 \text{ m})$.

Lösung der Übungsaufgabe ÜA_3_14.4.D:

Zu a) Das elektrische Potential weist an der Stelle x_0 den maximalen Wert auf. Mit zunehmender Entfernung l_x vom Punkt x_0 wird das Potential kleiner. Es gilt:

$$\varphi(x) = \varphi_{x\text{E}} + \varphi_{x\text{SE}} = \frac{I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + l_x^2}} + \frac{I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + l_x^2}} = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + l_x^2}}$$

Das größte Potentialgefälle (maximaler Betrag der elektrischen Feldstärke) existiert links und rechts von der Lage des Potentialmaximums.

Zur Bestimmung des Verlaufs des Betrages der elektrischen Feldstärke auf der Erdoberfläche längs der angegebenen Symmetrielinie werden zunächst die Beiträge des Erders und des Spiegelerders berechnet. Infolge der Symmetrie der Anordnung sind diese beiden Beiträge auf der Erdoberfläche immer gleich.

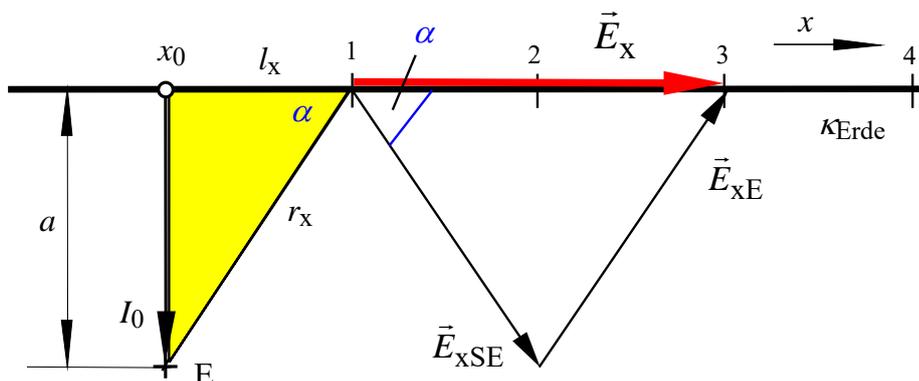


Bild ÜA_3_14.4.D_1: Überlagerung der Feldstärkevektoren

Die Winkel, die die Vektoren gegen die Erdoberfläche einschließen, haben den gleichen Betrag und unterschiedliche Vorzeichen. Der resultierende Vektor dieser Feldstärke verläuft immer parallel zur Erdoberfläche und ist, vom Punkt x_0 ausgehend, radial nach außen gerichtet (z.B.: Einheitsvektor \vec{e}_x).

Der Betrag der resultierenden Feldstärke kann in jedem Punkt x durch Überlagerung der beiden Komponenten berechnet werden. Diese Berechnung gelingt über die Vektorrechnung. Da es sich bei einer Schnittdarstellung um Vektoren in einer Ebene handelt, kann als Hilfsmittel zur Herleitung einer Berechnungsvorschrift z.B. auch die komplexe Rechnung eingesetzt werden. Es entstehen zwei Zeiger, die sich jeweils als konjugiert komplexe Zeiger zueinander verhalten:

Mit $\vec{E}_x \hat{=} \underline{A}$ und $\vec{E}_{xE} \hat{=} \underline{A}_1$ sowie $\vec{E}_{xSE} \hat{=} \underline{A}_2 = \underline{A}_1^*$ gilt:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A}_1 + \underline{A}_1^* = |\underline{A}_1| \cdot (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) = |\underline{A}_1| \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha + \cos \alpha - j \sin \alpha)$$

$$\underline{A} = |\underline{A}_1| \cdot 2 \cdot (\cos \alpha) = |\underline{A}| \cdot e^{j0^\circ} \quad (14.4.D_1)$$

Der resultierende Zeiger (hier: Vektor der elektrischen Feldstärke – dargestellt in der Ebene) liegt demzufolge auf der reellen Achse. Für den Kosinus des Winkels α (siehe gelb unterlegtes Dreieck im Bild ÜA_3_14.4.D_1) gilt: $\cos \alpha = l_x / r_x$. Durch Einsetzen aller bekannten Größen in die Berechnungsvorschrift nach Gleich. (14.4.D_1) erhält man mit $|\vec{E}_{xE}| = |\vec{E}_{xSE}|$:

$$|\vec{E}_x| = E_x = \frac{I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot r_x^2} \cdot 2 \cdot \cos \alpha = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot r_x^2} \cdot \frac{l_x}{r_x} \quad \text{mit:} \quad k = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}}} \quad \text{und:} \quad r_x = \sqrt{a^2 + l_x^2}$$

$$E_x = k \cdot \frac{l_x}{r_x^3} = k \cdot l_x \cdot r_x^{-3} = k \cdot l_x \cdot (a^2 + l_x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\vec{E}_x = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}}} \cdot l_x \cdot (a^2 + l_x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \vec{e}_x \quad (14.4.D_2)$$

Bild ÜA_3_14.4.D_2 zeigt den Verlauf des Betrages der Feldstärke längs einer Symmetrielinie, die durch x_0 verläuft. Der Betrag der elektrischen Feldstärke ist an der Stelle x_0 gleich Null. Die Beiträge beider Erder sind betragsmäßig gleich. Sie haben aber genau die entgegengesetzte Richtung.

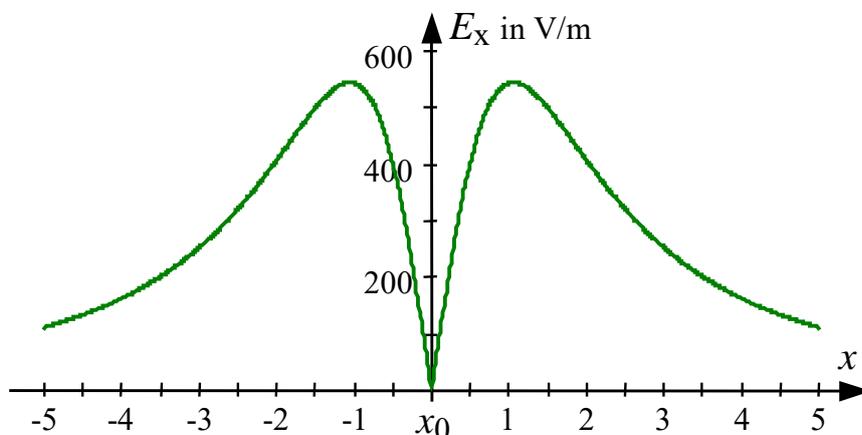


Bild ÜA_3_14.4.D_2: Verlauf des Betrages der elektrischen Feldstärke

Die Stromdichte hat den gleichen Verlauf wie die elektrische Feldstärke. Da die Beträge unterschiedlich sind, müsste die Skalierung der Ordinatenachse des Bildes ÜA_3_14.4.D_2 für die Darstellung der Stromdichte durch Multiplikation mit dem Faktor κ verändert werden.

Zu b) Zur Bestimmung der Lage des Maximums wird nun die erste Ableitung gebildet (Anwendung der Produktregel) und gleich Null gesetzt:

$$\frac{dE_x}{dl_x} = k \cdot (a^2 + l_x^2)^{-\frac{3}{2}} + k \cdot l_x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (a^2 + l_x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2l_x = 0$$

$$k \cdot (a^2 + l_x^2)^{-\frac{3}{2}} = k \cdot 3l_x^2 \cdot (a^2 + l_x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$1 = 3l_x^2 \cdot (a^2 + l_x^2)^{-1} \quad \text{bzw.:} \quad a^2 + l_x^2 = 3l_x^2 \quad \text{Lösung: } l_x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Die Lage des Maximums des Betrages der elektrischen Feldstärke wird von der Eingabtiefe des Erders bestimmt. Dieses Maximum bildet sich im Abstand $0,707 \cdot a$ ringförmig um die Eingabstelle x_0 aus.

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Fall c1: Die Schrittspannung U_s wird für den Fall berechnet, dass sich ein Mensch mit einer Schrittweite $s = 1$ m vom Punkt $(x_0 - 5$ m) über x_0 zum Punkt $(x_0 + 5$ m) bewegt.

$$U_s(x) = U_s[x \rightarrow (x+s)] = \varphi_x - \varphi_{x+s} \quad \text{mit: } l_x = x \cdot 1 \text{ m}$$

$$\varphi_x = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + l_x^2}} \quad \text{und:} \quad \varphi_{x+s} = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + (l_x + s)^2}}$$

$$U_s(x) = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + l_x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (l_x + s)^2}} \right)$$

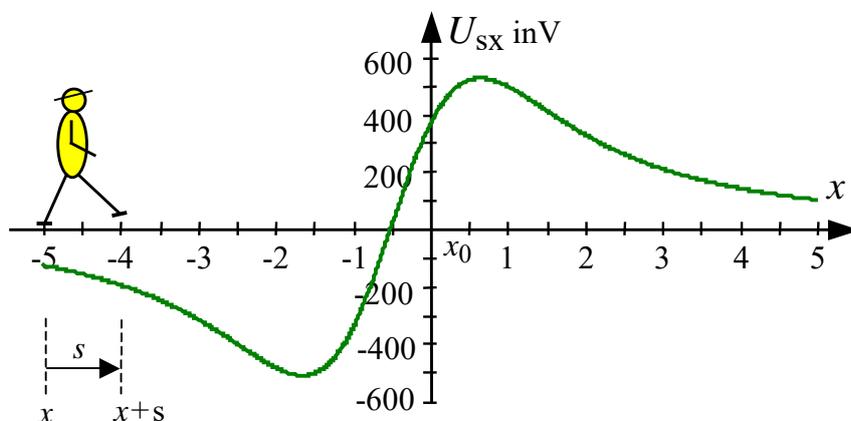


Bild ÜA_3_14.4.D_3: Verlauf der Schrittspannung im Fall c1

Mit einem Schritt von x nach $x + s$ überbrückt ein Mensch jeweils die im aktuellen Punkt x des Bildes ÜA_3_14.4.D_3 angegebene Potentialdifferenz (Zählpfeil in Schrittrichtung). Die maximale Schrittspannung entsteht hier an den Standpunkten: $(x_0 - 1,5$ m) und $(x_0 + 0,5$ m).

Fall c2: Die Schrittspannung U_s wird jetzt für den Fall berechnet, dass sich ein Mensch mit einer Schrittlänge $s = 1\text{ m}$ vom Punkt $(x_0 + 5\text{ m})$ über x_0 zum Punkt $(x_0 - 5\text{ m})$ bewegt. Er läuft also jetzt gegen die gewählte x - Richtung.

$$U_s(x) = U_s[x \rightarrow (x - s)] = \varphi_x - \varphi_{x-s} \quad \text{mit: } l_x = x \cdot 1\text{ m}$$

$$\varphi_x = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + l_x^2}} \quad \text{und:} \quad \varphi_{x-s} = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + (l_x - s)^2}}$$

$$U_s(x) = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + l_x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (l_x - s)^2}} \right)$$

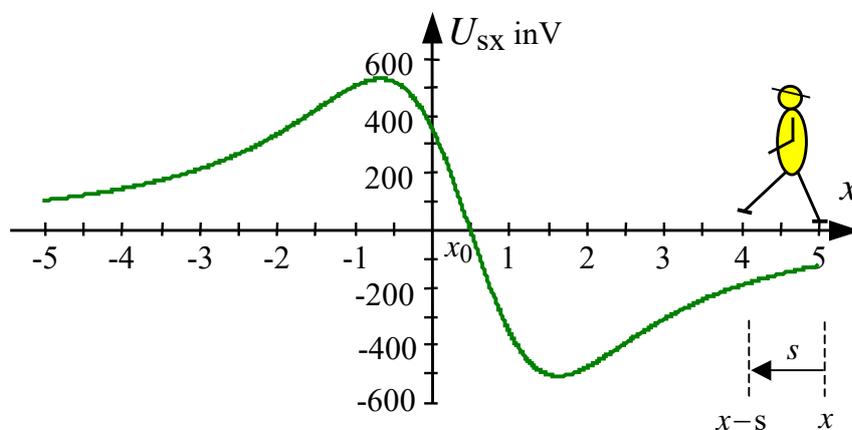


Bild ÜA_3_14.4.D_4: Verlauf der Schrittspannung im Fall c2

Mit einem Schritt von x nach $x - s$ überbrückt ein Mensch jeweils die im aktuellen Punkt x des Bildes ÜA_3_14.4.D_4 angegebene Potentialdifferenz (Zählpfeil in Schrittrichtung). Die maximale Schrittspannung entsteht hier an den Standpunkten: $(x_0 + 1,5\text{ m})$ und $(x_0 - 0,5\text{ m})$.

Der unsymmetrische Verlauf der Schrittspannung in den Bildern ÜA_3_14.4.D_3 und ÜA_3_14.4.D_4 resultiert aus der Tatsache, dass die Schrittspannung für den Punkt x berechnet wurde, auf dem sich gerade der ruhende Fuß befindet. Die Schrittspannung wird an der Stelle gleich Null, an der ein Schritt von $x - 0,5\text{ m}$ auf den Punkt $x + 0,5\text{ m}$ gemacht wird. Mit diesem Schritt wird keine Potentialdifferenz überbrückt, da die Potentiale in beiden Punkten gleich groß sind.

Fall c3: Die Schrittspannung U_s wird nun für den Fall berechnet, dass sich ein Mensch mit einer Schrittlänge $s = 1\text{ m}$ vom Punkt $(x - 5\text{ m})$ im Abstand b parallel zu x_0 zum Punkt $(x + 5\text{ m})$ bewegt. Er läuft also jetzt im Abstand b an der Eingrabstelle vorbei.

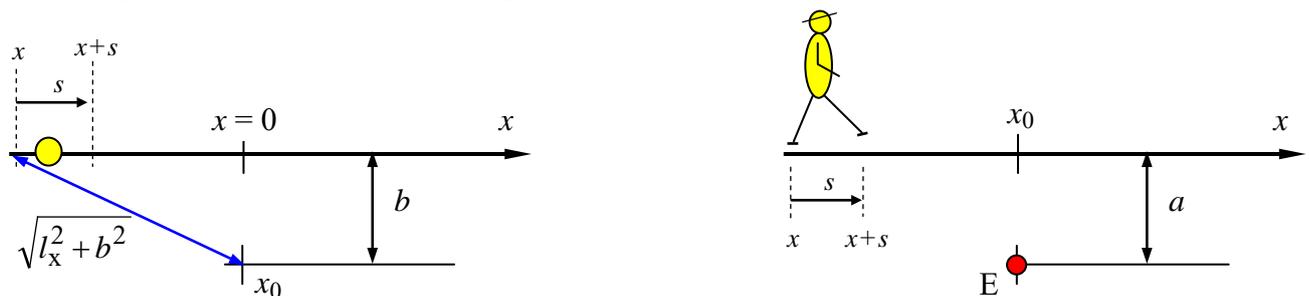


Bild ÜA_3_14.4.D_5: Bewegungsrichtung des Läufers im Fall c3

links: Sicht auf die Erdoberfläche

rechts: Schnitt (\perp) durch das Erdreich

$$U_s(x) = U_s[x \rightarrow (x+s)] = \varphi_x - \varphi_{x+s} \quad \text{mit: } l_x = x \cdot 1 \text{ m} \quad \text{und: } b = 2 \text{ m (z.B.)}$$

$$\varphi_x = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + l_x^2 + b^2}} \quad \text{und: } \varphi_{x+s} = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}} \cdot \sqrt{a^2 + (l_x + s)^2 + b^2}}$$

$$U_s(x) = \frac{I_0}{2\pi \cdot \kappa_{\text{Erde}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + l_x^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (l_x + s)^2 + b^2}} \right)$$

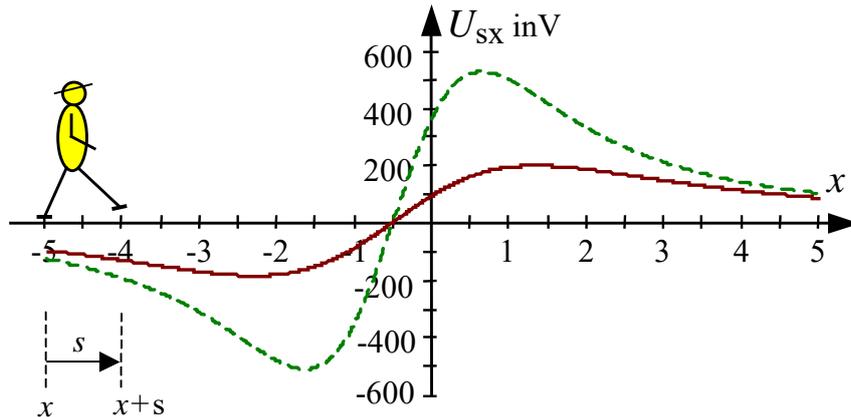


Bild ÜA_3_14.4.D_6: Verlauf der Schrittspannung im Fall c3 im Vergleich zum Fall c1 (gestrichelt dargestellt)

Mit einem Schritt von x nach $x + s$ überbrückt ein Mensch jeweils die im aktuellen Punkt x des Bildes ÜA_3_14.4.D_6 angegebene Potentialdifferenz (Zählpfeil in Schrittichtung). Die Schrittspannung wird im Fall c3 (durchgezogener Verlauf im Bild ÜA_3_14.4.D_6) im Vergleich zum Fall c1 (gestrichelter Verlauf im Bild ÜA_3_14.4.D_6) kleiner. Sie hat wieder an derjenigen Stelle den Wert Null, an der ein Schritt von $x - 0,5$ m auf den Punkt $x + 0,5$ m gemacht wird. Die Maxima flachen ab und entfernen sich mit zunehmendem Abstand b vom Punkt $x = 0$ in Richtung größerer x – Beträge.

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 14.6 bis 14.8.

Ende der zusätzlichen Lösung