

Lösung der Übungsaufgabe ÜA_3_16.3.A:

20.09.2022

a) Berechnung aller Spannungen im Ergebnis des Vorgangs A:
 (kapazitiver Spannungsteiler)

$$\frac{U_{4A}}{U_{8A}} = \frac{C_6 | C_7 | (C_2 + C_3)}{C_4 + C_6 | C_7 | (C_2 + C_3)} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{U_{8A}}{U_A} = \frac{C_9}{C_9 + C_8 + C_4 | C_6 | C_7 | (C_2 + C_3)} = \frac{7}{16}$$

$$C_{\text{gesA}} = C_9 | [C_8 + C_4 | (C_2 + C_3) | C_6 | C_7] = \frac{9}{16} C$$

$$u_{8A}(\downarrow) = U_{8A\infty} \cdot (1 - e^{-t/\tau_A}) = \frac{7}{16} \cdot U_A \cdot (1 - e^{-t/\frac{9}{16}RC}) = 0,4375 \cdot U_A \cdot (1 - e^{-t/0,5625 \cdot RC})$$

Lösung zu a):

$$U_{2A}(\downarrow) = U_{3A}(\downarrow) = 5 \text{ V}$$

$$U_{4A}(\leftarrow) = 10 \text{ V}$$

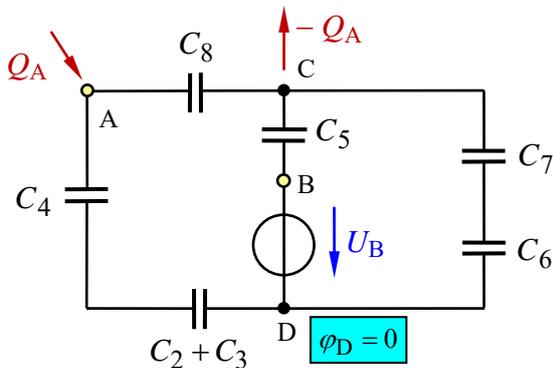
$$U_{6A}(\rightarrow) = U_{7A}(\rightarrow) = 10 \text{ V}$$

$$U_{8A}(\downarrow) = 35 \text{ V}$$

$$U_{9A}(\leftarrow) = 45 \text{ V}$$

Richtungen: gemäß Anordnung der Bauelemente in der originalen Schaltung (Bild ÜA_3_16.3.A).

b) Berechnung aller Spannungen im Ergebnis des Vorgangs B (Knotenanalyse):



mit: $Q_A = U_A \cdot C_{\text{gesA}}$

sowie: $U_A = 80 \text{ V}$

und: $U_B = 75 \text{ V}$

Bild ÜA_3_16.3.A_1: Ersatzschaltung zur Aufgabe ÜA_3_16.3.A [für b) umgezeichnet]

Tabelle ÜA_3_16.3.A_1: Koeffizientenschema für die Potentiale im Ergebnis des Vorgangs B

	φ_A	$\varphi_B = U_B$	φ_C	Abs.
(1)	$C_8 + C_4 (C_2 + C_3)$	0	$-C_8$	$+U_A \cdot C_{\text{gesA}}$
	0	C_5	$-C_5$	$+U_B \cdot C_{\text{gesB}}$
(3)	$-C_8$	$-C_5$	$C_5 + C_8 + C_6 C_7$	$-U_A \cdot C_{\text{gesA}}$

- Lösung des Gleichungssystems:

$$(1) \quad \frac{5}{3}C \cdot \varphi_A - C \cdot \varphi_C = \frac{9}{16}C \cdot U_A \quad \text{und:}$$

$$(3) \quad -C \cdot \varphi_A + 2,5C \cdot \varphi_C = -\frac{9}{16}C \cdot U_A + C \cdot U_B$$

$$1,6 \cdot \varphi_A - \varphi_C = 45 \text{ V}$$

$$-\varphi_A + 2,5\varphi_C = 30 \text{ V}$$

$$\text{Knotenpotentiale:} \quad \varphi_A = 45 \text{ V} \quad \text{und:} \quad \varphi_C = 30 \text{ V}$$

- Berechnung der Spannungen aus den Knotenpotentialen:

Die Pfeile geben die Richtungen dieser Spannungen im statischen Zustand B für die Ersatzschaltung im Bild ÜA_3_16.3.A_1 an.

$$U_{2B}(\rightarrow) = U_{3B}(\rightarrow) = \frac{\varphi_A - \varphi_D}{3} = 15 \text{ V}$$

$$U_{4B}(\downarrow) = 2 \cdot \frac{\varphi_A - \varphi_D}{3} = 30 \text{ V}$$

$$U_{5B}(\uparrow) = \varphi_B - \varphi_C = U_B - \varphi_C = 45 \text{ V}$$

$$U_{6B}(\downarrow) = U_{7B}(\downarrow) = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{2} = 15 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad U_{67B}(\downarrow) = 30 \text{ V}$$

$$U_{8B}(\rightarrow) = \varphi_A - \varphi_C = 15 \text{ V}$$

Probe (Maschensatz):

$$\text{Masche rechts:} \quad U_{5B}(\uparrow) + U_{67B}(\downarrow) - U_B(\downarrow) = 0$$

$$U_B = U_{5B} + U_{67B} = 45 \text{ V} + 30 \text{ V} = 75 \text{ V} \quad (\text{stimmt !})$$

$$\text{Masche links:} \quad U_{5B}(\uparrow) - U_{8B}(\rightarrow) + U_{4B}(\downarrow) + U_{23B}(\rightarrow) - U_B(\downarrow) = 0$$

$$U_B = U_{5B} - U_{8B} + U_{4B} + U_{23B} = 45 \text{ V} - 15 \text{ V} + 30 \text{ V} + 15 \text{ V} = 75 \text{ V} \quad (\text{stimmt !})$$

- c) Verschobene Ladung:

$$\Delta Q_4 = Q_{4B} - Q_{4A} = C_4 \cdot (U_{4B} - U_{4A}) = 30 \mu\text{F} \cdot (30 \text{ V} - 10 \text{ V}) = 600 \mu\text{As}$$

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:

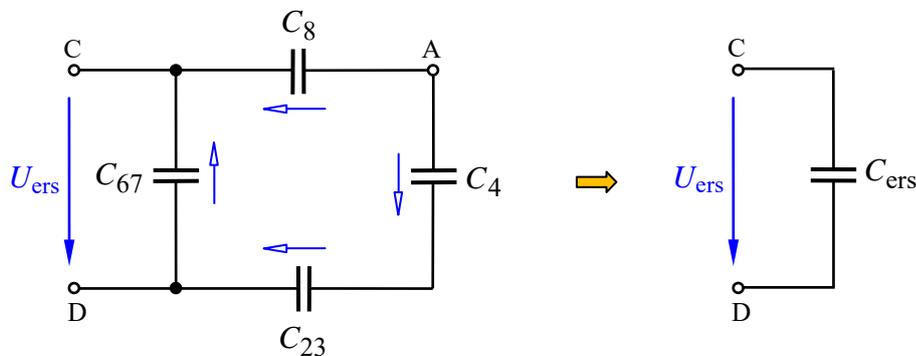
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 16.5 bis 16.11

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Der Vorgang A ist abgeschlossen. Die Kondensatoren sind auf die berechneten Werte vorgeladen [siehe: Lösung von a) – nicht ausgefüllte Zählpfeile im Bild ÜA_3_16.3.A_2].

Der Vorgang B wird nicht gestartet. Berechnen Sie die Daten der vorgeladenen Ersatzkapazität, die in diesem Fall zwischen den Punkten C und D wirksam ist.



Lösung von a):

$$U_{23A} = 5 \text{ V}$$

$$U_{4A} = 10 \text{ V}$$

$$U_{67A} = 20 \text{ V}$$

$$U_{8A} = 35 \text{ V}$$

Richtungen: siehe offene Zählpfeile im Bild ÜA_3_16.3.A_2.

Bild ÜA_3_16.3.A_2: Ersatzschaltung zur Zusatzaufgabe ÜA_3_16.3.A

Lösung:

Der Zählpfeil der Ersatzspannung U_{ers} wird gemäß Aufgabenstellung von C nach D festgelegt.

Wir betrachten zunächst den rechten Zweig ($C_8 - C_4 - C_{23}$) und berechnen diese Ersatzspannung:

$$U_{8423,\text{ers}}(\downarrow) = +U_{4A} + U_{23A} - U_{8A} = 10 \text{ V} + 5 \text{ V} - 35 \text{ V} = -20 \text{ V}$$

Dann wird in diesem Zweig folgende Ersatzladung gespeichert:

$$Q_{8423,\text{ers}} = C_8 | C_4 | C_{23} \cdot U_{8423,\text{ers}} = (30 | 30 | 60) \mu\text{F} \cdot (-20 \text{ V}) = 12 \mu\text{F} \cdot (-20 \text{ V}) = -240 \mu\text{A} \cdot \text{s}$$

Für den mittleren Zweig (C_{67}) erhalten wir mit der Orientierung von U_{ers} (\downarrow):

$$U_{67,\text{ers}}(\downarrow) = -20 \text{ V} \quad \text{und:} \quad Q_{67,\text{ers}} = C_{67} \cdot U_{67,\text{ers}} = 15 \mu\text{F} \cdot (-20 \text{ V}) = -300 \mu\text{A} \cdot \text{s}$$

Für die Summe der Ladungen im Punkt C gilt dann:

$$Q_{C,\text{ers}} = Q_{8423,\text{ers}} + Q_{67,\text{ers}} = -240 \mu\text{A} \cdot \text{s} - 300 \mu\text{A} \cdot \text{s} = -540 \mu\text{A} \cdot \text{s}$$

Im Ergebnis des Ausgleichsvorganges liegt somit zwischen den Punkten C und D folgende Spannung:

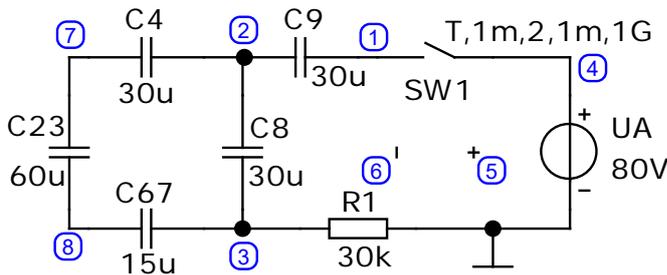
$$U_{\text{ers}}(\downarrow) = \frac{Q_{C,\text{ers}}}{C_{\text{ers}}} = \frac{Q_{C,\text{ers}}}{C_{67} + C_8 | C_4 | C_{23}} = \frac{-540 \mu\text{A} \cdot \text{s}}{27 \mu\text{F}} = -20 \text{ V}$$

Die wirksame Ersatzkapazität mit $C_{\text{ers}} = C_{67} + C_8 | C_4 | C_{23} = 27 \mu\text{F}$ ist so vorgeladen, dass über den Punkten C und D eine negative Spannung abfällt. Die positive Ladung liegt demzufolge am Punkt D.

Zusammenfassung: (Schrittfolge zur Bestimmung einer vorgeladenen Ersatzkapazität)

- Anwendung des Maschensatzes zur Bestimmung der Ersatzspannung über einer Ersatzreihenschaltung
- Berechnung der Ersatzladung dieser Reihenschaltung über das Ladungsgesetz [Gleich. (15.10)]
- Bestimmung der Ersatzladung weiterer paralleler Zweige
- Anwendung des Knotenpunktsatzes (Summe aller Ladungen) auf den betrachteten äußeren Knoten
- Bestimmung der Ersatzspannung über den betrachteten äußeren Knoten [Gleich. (15.10)].

Die Zwischenergebnisse der Zusatzaufgabe wollen wir mit MICROCAP testen. Bild ÜA_3_16.3.A_3 zeigt die dazu verwendete Simulationsschaltung:



$V(7) - V(8): U_{2A} (\downarrow) = U_{3A} (\downarrow) = 5V$
 $V(2) - V(7): U_{4A} (\leftarrow) = 10V$
 $V(8) - V(3): U_{6A} (\rightarrow) = U_{7A} (\rightarrow) = 10V$
 $V(2) - V(3): U_{8A} (\downarrow) = 35V$
 $V(1) - V(2): U_{9A} (\leftarrow) = 45V$

Bild ÜA_3_16.3.A_3: Simulationsschaltung zur Bestimmung einer vorgeladenen Ersatzkapazität

Das Ergebnis der Simulation bestätigt unsere Berechnung (siehe Bild rechts und Bild ÜA_3_16.3.A_4).

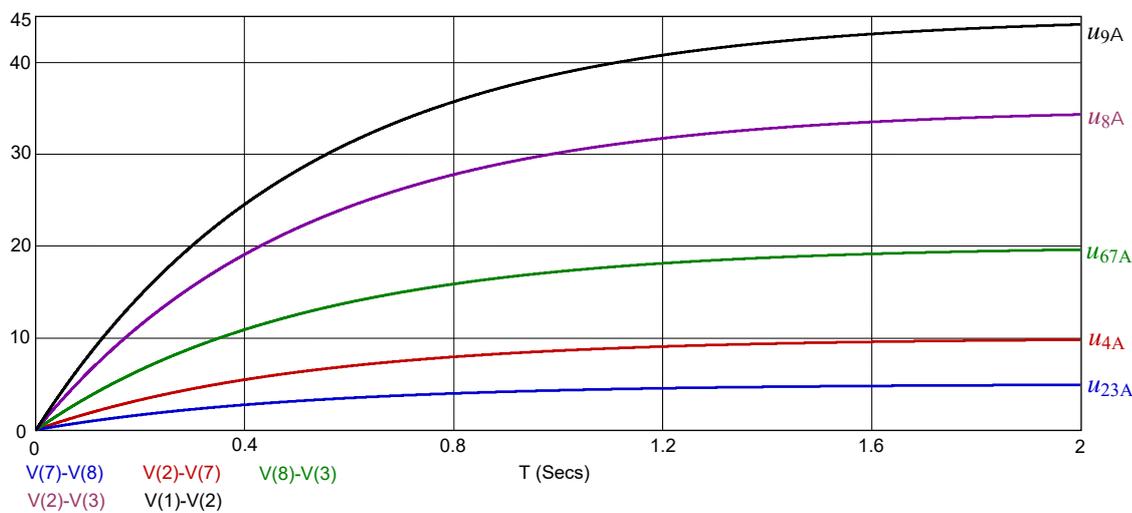
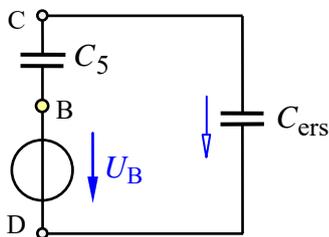


Bild ÜA_3_16.3.A_4: Simulationsergebnis

Zu welchem Zweck kann man vorgeladene Ersatzkapazitäten (wie Bild ÜA_3_16.3.A_2) verwenden? Sie bieten uns eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Spannungen gemäß Aufgabenstellung b) oder zur Probe der in b) berechneten Spannungswerte. Dazu schalten wir die vorgeladene Ersatzkapazität als Ersatz für die Kombination $(C_8 - C_4 - C_{23} - C_{67})$ an die Punkte C und D des Bildes ÜA_3_16.3.A_1. Wir erhalten eine Reihenersatzschaltung von zwei Kondensatoren mit einer Quelle gemäß Lehrbuch [14] – Abschn. 16.3.2. Es gelten die Gleich. (16.29) und (16.30).



mit: $U_B = 75V$
 sowie: $U_{ers} = -20V$ und: $U_{5A} = 0V$

Bild ÜA_3_16.3.A_5: Ersatzschaltung zur Zusatzaufgabe mit vorgeladener Ersatzkapazität

Wir wollen zur Probe U_{5B} berechnen. Dann gilt die Gleich. (16.29) in folgender Form:

$$U_{5B}(\uparrow) = \frac{C_5 \cdot U_{5A} - C_{ers} \cdot U_{ers} + C_{ers} \cdot U_B}{C_5 + C_{ers}} = \frac{27\mu F \cdot (20 + 75)V}{57\mu F} = +45V \quad (\text{stimmt !})$$

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
 Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 16.5 bis 16.11