Lösung der Übungsaufgabe ÜA_1_3.5.A:

14.09.2022

• **Lösungsansatz:** $P_a = \dfrac{U_a^2}{R_a}$ mit: $U_a = I_K \cdot R_i // R_a = I_K \dfrac{R_i \cdot R_a}{R_i + R_a}$

1. Lösungsvariante: R_a berechnen und in P_a einsetzen

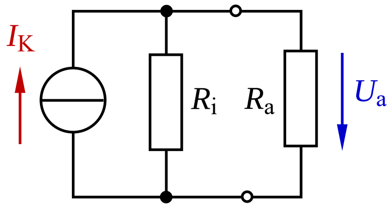

Bild ÜA_1_3.5.A_1: Stromquellen-Ersatzschaltung

$$\frac{U_a}{I_K} = \frac{R_i \cdot R_a}{R_i + R_a} \quad \Rightarrow \quad I_K \cdot R_i \cdot R_a = U_a \cdot R_i + U_a \cdot R_a$$

$$R_a = \frac{U_a \cdot R_i}{I_K \cdot R_i - U_a}$$

$$P_a = \frac{U_a^2 \cdot (I_K \cdot R_i - U_a)}{U_a \cdot R_i} = U_a \cdot I_K - \frac{U_a^2}{R_i}$$

$$U_a^2 - U_a \cdot I_K \cdot R_i + P_a \cdot R_i = 0 \qquad (\text{ÜA\_1\_3.5.A\_1})$$

---

2. Lösungsvariante: U_a direkt über P_a berechnen

$$U_a = I_K \cdot R_i // R_a = I_K \frac{R_i \cdot R_a}{R_i + R_a} \quad \text{mit:} \quad R_a = \frac{U_a^2}{P_a}$$

$$U_a = \frac{I_K \cdot R_i \cdot U_a^2 / P_a}{R_i + U_a^2 / P_a} \qquad \text{dividiert durch } U_a$$

$$1 = \frac{I_K \cdot R_i \cdot U_a / P_a}{R_i + U_a^2 / P_a} \quad \Rightarrow \quad R_i + \frac{U_a^2}{P_a} = \frac{I_K \cdot R_i \cdot U_a}{P_a}$$

$$U_a^2 - U_a \cdot I_K \cdot R_i + P_a \cdot R_i = 0 \qquad (\text{ÜA\_1\_3.5.A\_1})$$

• **Lösung:** mit Gleich: (ÜA_1_3.5.A_1)

$$U_{a,12} = \frac{I_K \cdot R_i}{2} \pm \sqrt{\frac{I_K^2 \cdot R_i^2}{4} - P_a \cdot R_i} = 5\,\text{V} \pm \sqrt{\frac{10^{-2} \cdot 10^4}{4} - 0{,}09 \cdot 100}\ \text{V}$$

$$U_{a1,2} = 5\ \text{V} \pm \sqrt{25 - 9}\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad U_{a1} = 1\ \text{V} \quad \text{und:} \quad U_{a2} = 9\ \text{V}$$

• Darstellung des Leistungsverlaufes mit einer MICROCAP-Simulation:

⇒ Schaltung wie Bild ÜA_1_3.5.A_1 mit: $I_K = 100$ mA und $R_i = 100\ \Omega$ $(0 \le R_a \le 1\ \text{k}\Omega)$

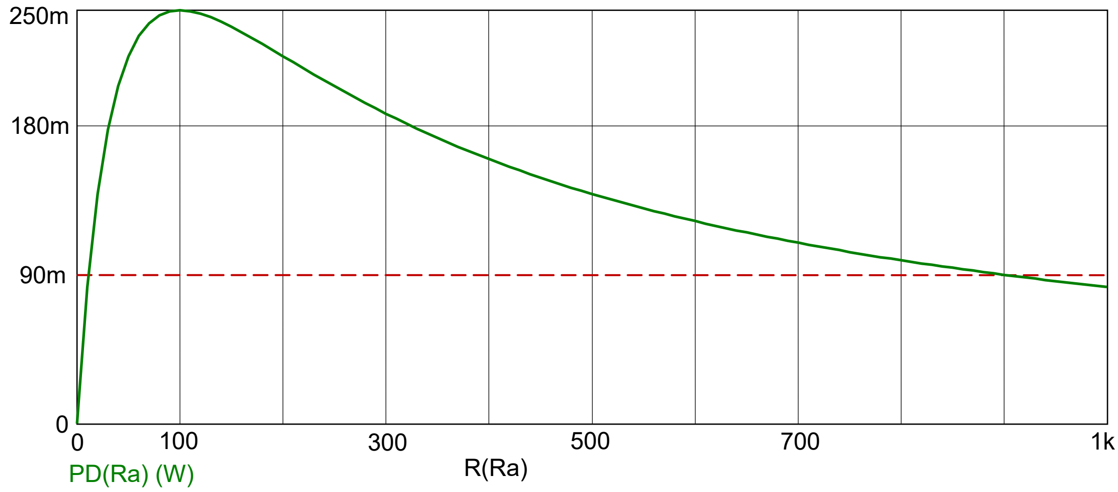

Bild ÜA_1_3.5.A_2: Leistungsverlauf $P_a = f\,(R_a)$

Bei $U_{a1} = 1$ V und $U_{a2} = 9$ V wird jeweils eine Leistung von 90 mW umgesetzt (siehe Rechnung).

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Ein Grundstromkreis mit $U_q = 20$ V und $R_i = 10\ \Omega$ wird mit einem variablen Widerstand R_a belastet. Für den Lastwiderstand gilt: $0 \le R_a \le 100\ \Omega$. Berechnen Sie:

a) die maximal mögliche Leistung $P_{a,max}$
b) die Lastwiderstände R_{a1} und R_{a2}, die einen Leistungsumsatz von $P_{ax} = 0{,}8 \cdot P_{a,max}$ bewirken
c) die im Fall b) fließenden Ströme I_{a1} und I_{a2}.

Zu a) $$P_{a,max} = \frac{U_L}{2} \cdot \frac{I_K}{2} = \frac{U_L}{2} \cdot \frac{U_L}{2R_i} = \frac{U_L^2}{4R_i}$$ [siehe Gleich. (3.17)]

Mit $U_L = U_q$ gilt: $$P_{a,max} = \frac{400}{40}\ \text{W} = 10\ \text{W}$$

Zu b) $$P_a = U_a \cdot I = I^2 R_a = \left(\frac{U_q}{R_i + R_a}\right)^2 \cdot R_a = \frac{U_q^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

$$P_{ax} = \frac{U_q^2 \cdot R_{ax}}{(R_i + R_{ax})^2}$$ bzw.: $$P_{ax} \cdot (R_i + R_{ax})^2 - U_q^2 \cdot R_{ax} = 0$$

⇒ umrechnen in die Normalform: $$P_{ax} \cdot (R_i^2 + 2R_i R_{ax} + R_{ax}^2) - U_q^2 \cdot R_{ax} = 0$$

$$R_{ax}^2 + R_{ax} \cdot (2R_i - \frac{U_q^2}{P_{ax}}) + R_i^2 = 0$$ Nebenrechnung: $$(2R_i - \frac{U_q^2}{P_{ax}}) = (20 - \frac{400}{8})\Omega = -30\,\Omega$$

Lösung: $R_{a1/2} = -\left(\frac{-30}{2}\right)\,\Omega \pm \sqrt{\frac{900}{4} - 100}\ \Omega = 15\ \Omega \pm \sqrt{125}\ \Omega$

$R_{a1} = 3{,}82\ \Omega$ und: $R_{a2} = 26{,}18\ \Omega$

Zu c) $I_{a1} = \frac{U_q}{R_i + R_{a1}} = \frac{20}{13{,}82}\,\text{A} \approx 1{,}447\,\text{A}$

$I_{a2} = \frac{U_q}{R_i + R_{a2}} = \frac{20}{36{,}18}\,\text{A} \approx 0{,}553\,\text{A}$

Proben [für b) und c)]:

$P_{a1} = I_{a1}^2 \cdot R_{a1} = (1{,}447)^2 \cdot 3{,}82\ \text{W} = 7{,}998\,\text{W} \approx 8\ \text{W}$

$P_{a2} = I_{a2}^2 \cdot R_{a2} = (0{,}553)^2 \cdot 26{,}18\ \text{W} = 8{,}006\,\text{W} \approx 8\ \text{W}$ (beide Proben stimmen !)

Für die Leistungen führen wir eine Probe mit MICROCAP durch:

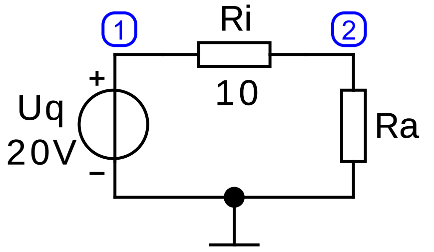

Bild ÜA_1_3.5.A_3: Simulationsschaltung für die Zusatzaufgabe

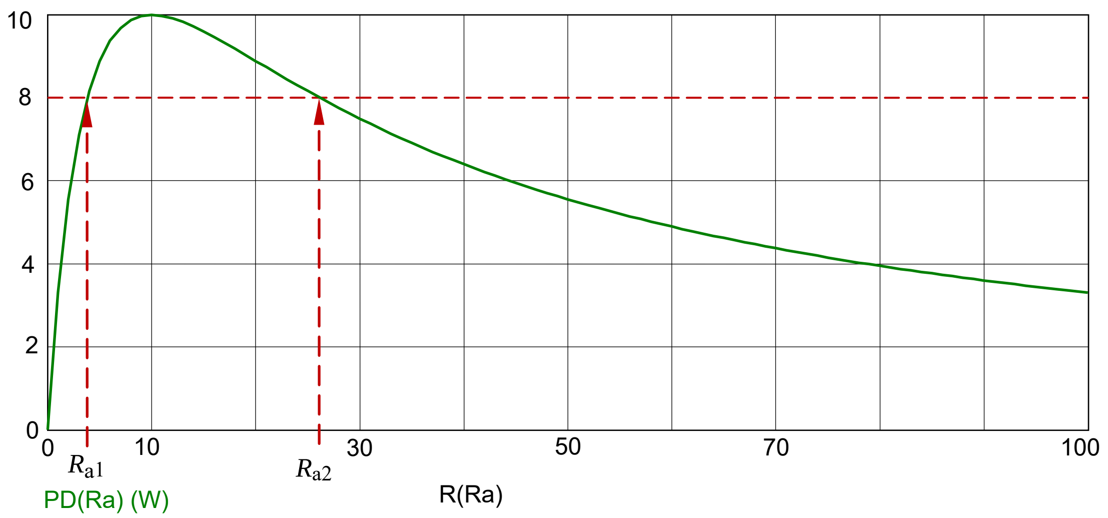

Bild ÜA_1_3.5.A_4: Leistungsverlauf $P_a = f\,(R_a)$

Bei $I_{a1} = 0{,}553$ A und $I_{a2} = 1{,}447$ A wird jeweils eine Leistung von 8 W umgesetzt (vgl. Rechnung). Das Maximum der Leistung liegt bei $P_{a,max} = 10$ W ($R_a = 10\ \Omega$).

Ende dieser Zusatzlösung