Prof. Dr.-Ing. Rainer Ose Elektrotechnik für Ingenieure – Grundlagen – 7. Auflage, 2022	Hochschule OSTFALIA Wolfenbüttel – University of Applied Sciences –

Lösung der Übungsaufgabe ÜA_2_10.2.A:

09.09.2022

Die Schaltung wirkt als Hochpass. Bei $f = 0$ ist die Ausgangsspannung $\underline{U}_\mathrm{a}$ infolge $|X_\mathrm{C}| \to \infty$ gleich null. Bei sehr hohen Frequenzen (Durchlassbereich) wirkt ein frequenzunabhängiger Spannungsteiler:

$\dfrac{\underline{U}_\mathrm{a,max}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ Der Hochpass weist somit im Durchlassbereich eine Grunddämpfung $A_\infty < 1$ auf (vgl. Bild ÜA_2_10.2.A_4 – links).

Zur Berechnung der Grenzfrequenz wird die Spannungsteilerregel angewendet:

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

Aus diesem Ansatz wird der Ausdruck $\dfrac{\underline{U}_\mathrm{a,max}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ ausgeklammert (erweitern mit $\dfrac{1}{R_1 + R_2}$).

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{a,max}} \cdot \frac{\underline{U}_\mathrm{a,max}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \cdot \frac{\dfrac{1}{R_1 + R_2}}{\dfrac{1}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C\,(R_1 + R_2)}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Vom Ausdruck $\dfrac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{a,max}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C\,(R_1 + R_2)}}$

kann nun der Betrag gebildet und für die Bestimmung der Grenzfrequenz gleich $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt werden:

$$\left|\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{a,max}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\omega_\mathrm{g}^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{mit: } R_1 = R_2 = R \qquad (A_\infty = 0{,}5)$$

$$1 + \frac{1}{\omega_\mathrm{g}^2 C^2 4R^2} = 2 \qquad \text{bzw.:} \qquad \omega_\mathrm{g}^2 C^2 4R^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f_\mathrm{g} = \frac{1}{2\pi \cdot 2RC} = \frac{1}{4\pi \cdot RC}$$

Diskussion:

Die frequenzselektive Wirkung der Schaltung wird bei $R_1 << R_2$ erkennbar verbessert!

Ziel: siehe Bild ÜA_2_10.2.A_3.

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Ersetzen Sie die Kapazität durch eine Induktivität und bestimmen Sie für diese Schaltung die Grenzfrequenz. Diskutieren Sie den Einfluss des Widerstandes R_1 auf das Übertragungsverhalten.

Lösung:

Die Schaltung wirkt jetzt als Tiefpass. Im Sperrbereich ($f \to \infty$) ist $\underline{U}_\mathrm{a} = 0$. Bei ($f \to 0$) gilt:

$\frac{\underline{U}_\mathrm{a,max}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ Dieser Tiefpass weist im Durchlassbereich eine Grunddämpfung $A_0 < 1$ auf (vgl. Bild ÜA_2_10.2.A_2 – links).

Zur Berechnung der Grenzfrequenz wird die Spannungsteilerregel angewendet:

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$

Aus diesem Ansatz muss der Ausdruck $\frac{\underline{U}_\mathrm{a,max}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ ausgeklammert werden.

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{a,max}} \cdot \frac{\underline{U}_\mathrm{a,max}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega L} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega L}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Vom Ausdruck $\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{a,max}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega L}{R_1 + R_2}}$ wird nun der Betrag gebildet und gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt.

$$\left|\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{a,max}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_\mathrm{g}^2 L^2}{(R_1 + R_2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{mit: } R_1 = R_2 = R \qquad (A_0 = 0{,}5)$$

$$1 + \frac{\omega_\mathrm{g}^2 L^2}{4R^2} = 2 \qquad \text{bzw:} \qquad \omega_\mathrm{g}^2 L^2 = 4R^2 \qquad \Rightarrow \qquad f_\mathrm{g} = \frac{2R}{2\pi \cdot L} = \frac{R}{\pi \cdot L}$$

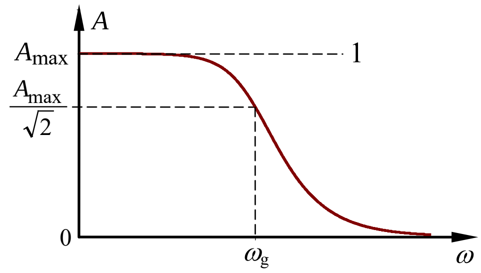
Diskussion:

Die frequenzselektive Wirkung der Schaltung wird bei $R_1 << R_2$ erkennbar verbessert!

Ziel: siehe Bild ÜA_2_10.2.A_1. Bei $R_1 \to 0$ gilt: $A_0 \to A_\mathrm{max} = 1$.

Diese Maßnahme gelingt in der schaltungstechnischen Praxis nur bedingt. Die verwendete Spule hat einen Verlustwiderstand. Die Signalquelle besitzt einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand. Beide Widerstände gehen mit in die Wirkung von R_1 ein!

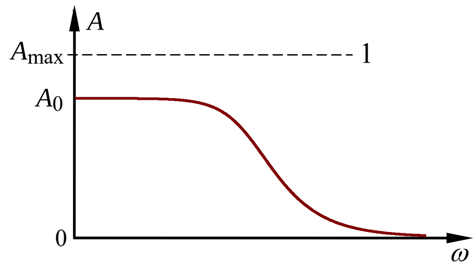
Die nachfolgenden Bilder zeigen unterschiedliche Verläufe des Amplitudenfrequenzganges einer Passschaltung:

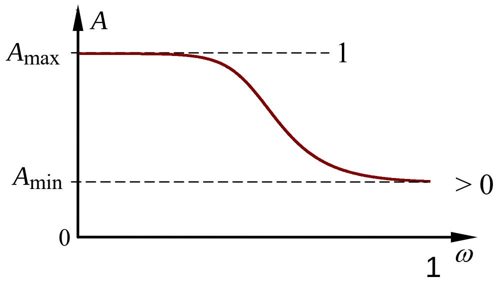


$$A_{max} = \frac{U_a}{U_e}\Big|_{\omega=0} = 1$$

$$A_{min} = \frac{U_a}{U_e}\Big|_{\omega\to\infty} = 0$$

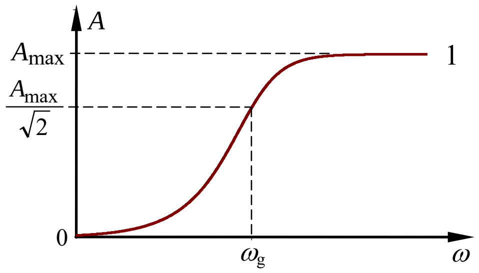
ÜA_2_10.2.A_1: Ideales Tiefpassverhalten





ÜA_2_10.2.A_2: Reales Tiefpassverhalten

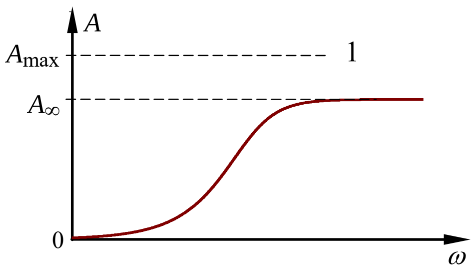
links: mit Grunddämpfung im Durchlassbereich
rechts: mit Restübertragung im Sperrbereich

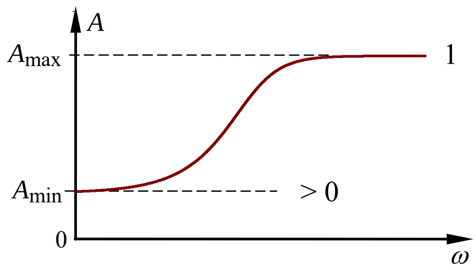


$$A_{max} = \frac{U_a}{U_e}\Big|_{\omega\to\infty} = 1$$

$$A_{min} = \frac{U_a}{U_e}\Big|_{\omega=0} = 0$$

ÜA_2_10.2.A_3: Ideales Hochpassverhalten





ÜA_2_10.2.A_4: Reales Hochpassverhalten

links: mit Grunddämpfung im Durchlassbereich
rechts: mit Restübertragung im Sperrbereich

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 10.1 bis 10.9

Ende der zusätzlichen Lösung