

Lösung der Übungsaufgabe ÜA_2_10.4.A:

09.09.2022

- Anwendung der Spannungs- und Stromteilerregel für \underline{A}_{11} und \underline{A}_{22}

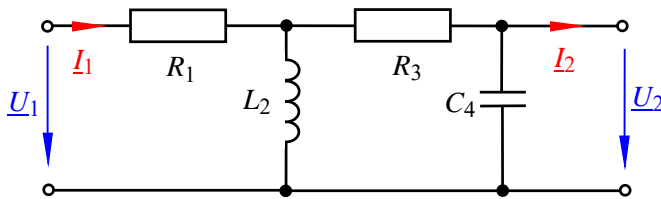


Bild ÜA_2_10.4.A_1:
 Darstellung im Ketten-ZPS

- Berechnung der Kettenparameter:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\frac{1}{j\omega C_4} + R_3}{\frac{1}{j\omega C_4}} \cdot \frac{R_1 + j\omega L_2 // \left(\frac{1}{j\omega C_4} + R_3 \right)}{j\omega L_2 // \left(\frac{1}{j\omega C_4} + R_3 \right)}$$

Vereinfachungen:

$$R_1 = R_3 = R$$

$$L_2 = L; C_4 = C$$

$$\underline{A}_{11} = \frac{\frac{1}{j\omega C} + R}{\frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{R + j\omega L // \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L // \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)} = j\omega C \cdot \frac{R \cdot \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) + j\omega L \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L}$$

$$\underline{A}_{11} = \frac{C}{L} \left[R^2 + j\omega LR + \frac{R}{j\omega C} + j\omega LR + \frac{L}{C} \right] = 1 + \frac{R^2 C}{L} + j \left(2\omega CR - \frac{R}{\omega L} \right)$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{U}_2=0} = \frac{j\omega L_2 + R_3}{j\omega L_2} = \frac{j\omega L + R}{j\omega L} = 1 - j \frac{R}{\omega L}$$

- Berechnung der Eingangswiderstände:

$$\underline{Z}_{1L} = R_1 + j\omega L_2 // \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_4} \right) \quad \text{und:} \quad \underline{Z}_{1K} = R_1 + j\omega L_2 // R_3$$

- Umrechnung der Eingangswiderstände in die Exponentialform:

$$\underline{Z}_{1L} = R + j\omega L // \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = R + \frac{j\omega L \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{Z}_{1L} = \frac{R^2 + j\omega LR + \frac{R}{j\omega C} + j\omega LR + \frac{L}{C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{R - \omega^2 LCR \cdot 2 + j(\omega CR^2 + \omega L)}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

$$\underline{Z}_{1L} = \sqrt{\frac{(R - \omega^2 LCR \cdot 2)^2 + (\omega CR^2 + \omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \cdot e^{j\left(\arctan \frac{\omega CR^2 + \omega L}{R - \omega^2 LCR \cdot 2} - \arctan \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right)}$$

$$\underline{Z}_{1K} = R + j\omega L // R = R + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{R^2 + j\omega LR + j\omega LR}{R + j\omega L}$$

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{R^2 + j\omega L2R}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{R^4 + \omega^2 L^2 4R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{j\left(\arctan \frac{2\omega L}{R} - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)}$$

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Berechnen Sie die Kettenparameter über Elementarvierpole (vgl. Lehrbuch [14] – Abschn. 10.4).

$$\underline{(A)} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L_2} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

⇒ ausmultiplizieren (z.B. über das Schema nach FALK):

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{R^2 C}{L} + j\omega C 2R - j\frac{R}{\omega L} \qquad \underline{A}_{12} = 2R - j\frac{R^2}{\omega L}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{RC}{L} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad \underline{A}_{22} = 1 - j\frac{R}{\omega L}$$

$$\underline{Z}_{1L} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} \quad (\text{einsetzen} \rightarrow \text{siehe Lösung zur originalen Aufgabenstellung})$$

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{\frac{2R\omega L - jR^2}{\omega L}}{\frac{\omega L - jR}{\omega L}} = \frac{2R\omega L - jR^2}{\omega L - jR} \cdot \frac{j}{j} = \frac{R^2 + j\omega L2R}{R + j\omega L} \quad (\text{vgl. originale Lösung})$$

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 10.1 bis 10.9

Ende der zusätzlichen Lösung