Prof. Dr.-Ing. Rainer Ose
Elektrotechnik für Ingenieure
– Grundlagen –
7. Auflage, 2022

Hochschule OSTFALIA Wolfenbüttel
– University of Applied Sciences –

Lösung der Übungsaufgabe ÜA_2_10.4.C:

13.09.2022

• **Vereinfachungen:** $\mathrm{j}\omega L \,//\, \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \dfrac{\mathrm{j}\omega L}{1-\Omega^2} = \underline{Z}_1$ und $\mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \dfrac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C} = \underline{Z}_0$

• **Berechnung über die $\underline{A}$-Parameter der Π-Ersatzschaltung:** (1. Lösungsvariante)

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_0 = \frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C} \qquad \text{mit: } \omega = \omega_0 \cdot \Omega = \frac{\Omega}{\sqrt{LC}} \qquad \text{und: } \omega C = \frac{\Omega \cdot C}{\sqrt{LC}} = \frac{\Omega}{\sqrt{L/C}}$$

$$\underline{A}_{12} = -\mathrm{j}\cdot\frac{1-\Omega^2}{\Omega}\cdot\sqrt{L/C} = \mathrm{j}\cdot\frac{\Omega^2-1}{\Omega}\cdot\sqrt{L/C}$$

$$\underline{A}_{22} = 1+\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1} = 1+\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C}\cdot\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega L} = 1+\frac{(1-\Omega^2)^2}{-\Omega^2} = \frac{\Omega^2-(1-\Omega^2)^2}{\Omega^2} = \frac{-\Omega^4+3\Omega^2-1}{\Omega^2}$$

• **Nullstellen und Pole:**

Nullstellen: $\underline{A}_{12} \to \Omega = 1$ $\qquad$ $\underline{A}_{22} \to \Omega_1 = 0{,}62$ und $\Omega_2 = 1{,}62$

Pole: $\underline{A}_{12} \to \Omega = 0$ $\qquad$ $\underline{A}_{22} \to \Omega = 0$

• **Darstellung der Frequenzgänge:** (MICROCAP-Simulation – AC-Analyse: 200 Hz $\leq f \leq$ 2 kHz)

Für die gewählten BE-Werte (C = 1 µF und L = 100 mH) liegt die Resonanzfrequenz bei $f_0 \approx$ 500 Hz.

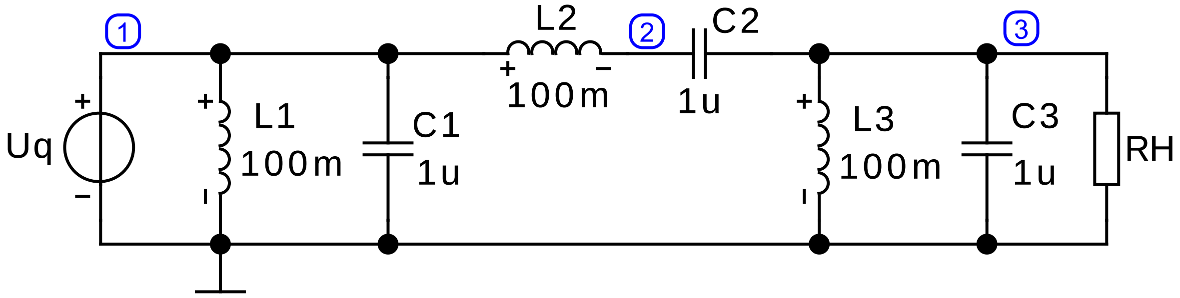

Bild ÜA_2_10.4.C_1: Simulationsschaltung zur Übungsaufgabe ÜA_2_10.4.C

Für die Kettenparameter $\underline{A}_{12}$ und $\underline{A}_{22}$ gilt die Randbedingung: Kurzschluss am Ausgang ($\underline{U}_2 = 0$). Dann wird der Hilfswiderstand auf R_H (K) = 1 µΩ eingestellt.

• Amplitudenfrequenzgang der Ausgangsspannung [nur zur Übersicht – mit R_H (L) = 10 GΩ]:

Die Pole liegen bei: $\Omega_1 = 0{,}62$ und $\Omega_2 = 1{,}62$. Bei einer Resonanzfrequenz von $f_0 \approx 500$ Hz ($\Omega = 1$) entspricht dieser Sachverhalt den Frequenzen $f_1 \approx 310$ Hz und $f_2 \approx 810$ Hz.

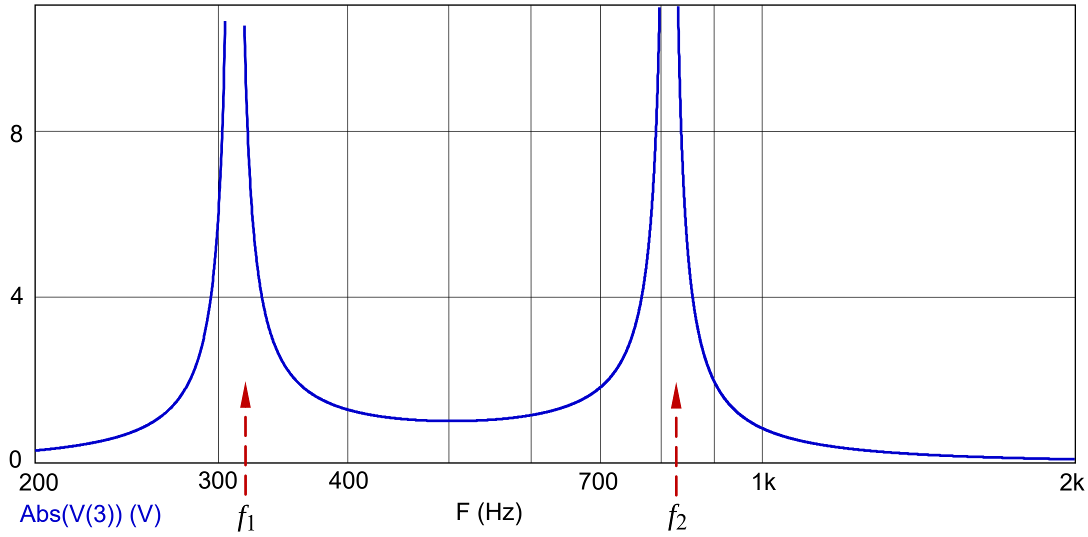

Bild ÜA_2_10.4.C_2: Amplitudenfrequenzgang der Ausgangsspannung des Bildes ÜA_2_10.4.C_1

Die Aufgabenstellung verlangt aber eine Betrachtung der Kettenparameter $\underline{A}_{12}$ und $\underline{A}_{22}$. Die Simulation muss demzufolge mit den Strom-Spannungsbeziehungen dieser Parameter durchgeführt werden:

[14] – (10.24): $\underline{A}_{12} = \left.\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{(\underline{U}_2=0)}$ und: [14] – (10.26): $\underline{A}_{22} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{(\underline{U}_2=0)}$

a) Wie die Berechnung zeigte, ist der Parameter $\underline{A}_{12}$ rein imaginär. Wir wollen zur Probe den Frequenzgang des Imaginärteils $\mathrm{Im}\{\underline{A}_{12}\} = g\,(f)$ und den Frequenzgang des Betrages $|\underline{A}_{12}| = g\,(f)$ simulieren. Um die Frequenzwerte besser ablesen zu können, wird die Frequenzachse linear dargestellt.
Für den Frequenzbereich gilt: 200 Hz ≤ f ≤ 1kHz.

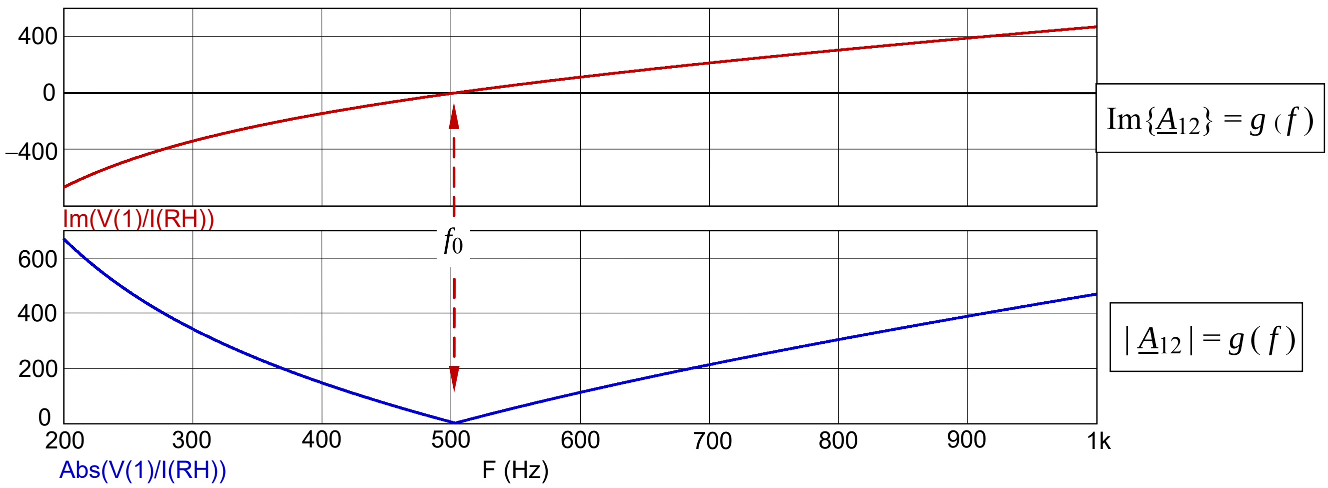

Bild ÜA_2_10.4.C_3: Verlauf des Imaginärteils (links) und des Betrages (rechts) von $\underline{A}_{12}$

Bei $f = 500$ Hz ($\Omega = 1$) wird der Imaginärteil und damit der Betrag von $\underline{A}_{12}$ gleich null.

Die Pole liegen bei $f = 0$ bzw. $\Omega = 0$ ($|\underline{A}_{12}| \to \infty$).

b) Wie die Berechnung zeigte, ist der Parameter $\underline{A}_{22}$ rein reell. Wir wollen zur Probe den Frequenzgang des Realteils $\mathrm{Re}\{\underline{A}_{22}\} = g\,(f)$ und den Frequenzgang des Betrages $|\,\underline{A}_{22}\,| = g\,(f)$ simulieren. Um die Frequenzwerte besser ablesen zu können, wird die Frequenzachse linear dargestellt.
Für den Frequenzbereich gilt: 200 Hz $\leq f \leq$ 1kHz.

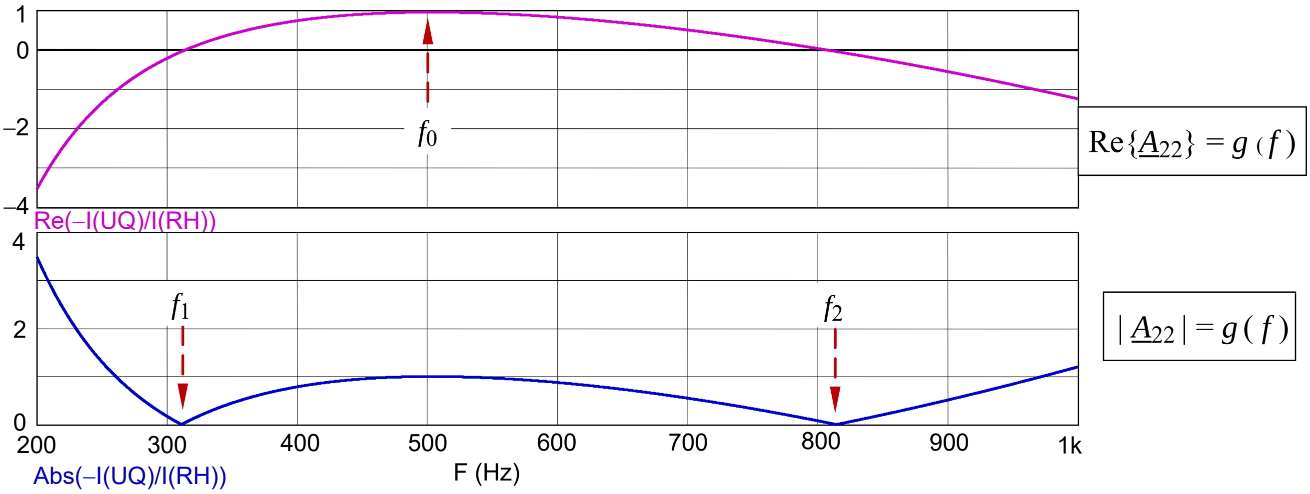

Bild ÜA_2_10.4.C_4: Verlauf des Realteils (links) und des Betrages (rechts) von $\underline{A}_{22}$

Bei $f_1 \approx$ 310 Hz (Ω_1 = 0,62) und bei $f_2 \approx$ 810 Hz ($\Omega_2 \approx$ 1,62) wird der Realteil und damit der Betrag von $\underline{A}_{22}$ gleich null.

Die Pole liegen bei $f = 0$ bzw. $\Omega = 0$ ($|\,\underline{A}_{22}\,| \rightarrow \infty$). Bei $f_0 \approx$ 500 Hz ($\Omega = 1$) hat der Parameter $\underline{A}_{22}$ einen Wert von eins.

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Berechnen Sie die gesuchten Parameter über andere Lösungsverfahren.

2. Lösungsvariante: Berechnung über Elementarvierpole

Tabelle ÜA_2_10.4.C_1:
Matrizen-Multiplikation

		1	$\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C}$	1	0
		0	1	$\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega L}$	1
1	0	1	$\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C}$		$\underline{A}_{12}$
$\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega L}$	1	$\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega L}$	$1+\frac{(1-\Omega^2)^2}{-\Omega^2}$		$\underline{A}_{22}$

3. Lösungsvariante: Anwendung der Spannungs- und Stromteilerregel

$$\underline{A}_{12}=\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{\mathrm{K}}=\underline{Z}_{1\mathrm{K}}\cdot\underline{A}_{22}=\left(\frac{\mathrm{j}\omega L}{1-\Omega^2}//\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C}\right)\cdot\left[1+\frac{(1-\Omega^2)^2}{-\Omega^2}\right]=\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}\cdot\frac{1-\Omega^2}{\Omega}\cdot\sqrt{L/C}$$

$$\underline{A}_{22}=\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{\mathrm{K}}=\left(\frac{\mathrm{j}\omega L}{1-\Omega^2}+\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega C}\right)\cdot\frac{1-\Omega^2}{\mathrm{j}\omega L}=1+\frac{(1-\Omega^2)^2}{-\Omega^2}=\frac{-\Omega^4+3\Omega^2-1}{\Omega^2}$$

Beide Verfahren führen zum bereits bekannten Ergebnis.

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 10.10 sowie 10.15 bis 10.17

Ende dieser zusätzlichen Lösung