Lösung der Übungsaufgabe ÜA_2_8.4.B:

10.09.2022

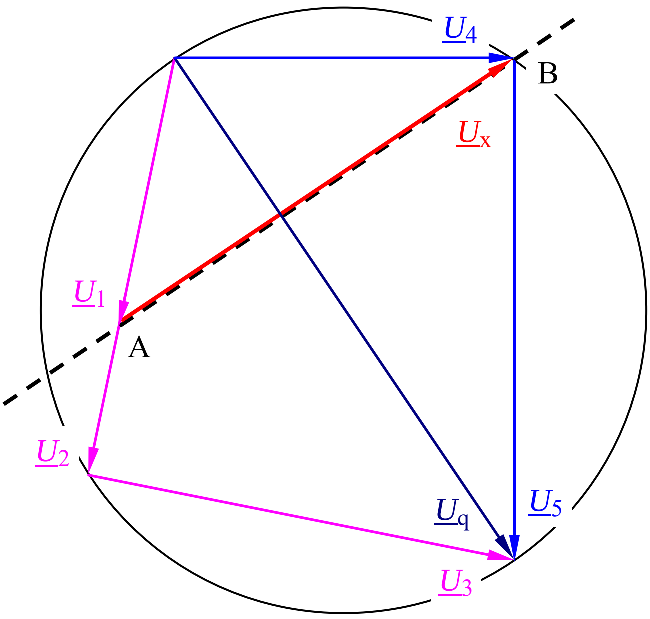
Festlegung: Die Zählpfeile aller Spannungen über den einzelnen BE zeigen nach rechts.

Für die Konstruktion des Zeigerbildes gilt folgende Überlegung:
Der Nullphasenwinkel der Quellenspannung ist nicht bekannt. Man könnte $\underline{U}_q$ als Bezugszeiger wählen, wenn man den Nullphasenwinkel φ_{Uq} mit null festlegt. Da die BE-Werte des mittleren Zweiges bekannt sind, kann auch $\underline{U}_4$ als Bezugszeiger gewählt und mit einem Widerstandsmaßstab gearbeitet werden. Die Widerstände in einer Reihenschaltung verhalten sich ja proportional zu den Spannungen. Es ist aber zu beachten, dass dann in der Reihenschaltung des oberen Zweiges ein anderer Maßstab gilt, weil dort ein anderer Strom fließt ($\underline{I}_{123} \neq \underline{I}_{45}$).

Gewählter Maßstab in der Reihenschaltung des mittleren Zweiges: $10\,\Omega \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$

Für den Betrag des kapazitiven Blindwiderstandes gilt dann: $\dfrac{1}{\omega C_5} = \dfrac{10^6}{314 \cdot 48}\,\Omega = 66{,}3\,\Omega \mathrel{\hat{=}} 6{,}63\,\text{cm}$

Nun wird zunächst das Zeigerbild des mittleren Zweiges gezeichnet. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Gesamtspannung als Hypotenuse (siehe blaues Dreieck im Bild ÜA_2_8.4.B_1). Der Zeiger der Gesamtspannung hat in diesem Fall einen Nullphasenwinkel von $\varphi_{Uq} \approx -56°$.



Probe:

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_q} = \frac{R_4}{R_4 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_5}} = \frac{45}{45 - \mathrm{j}66{,}3} = 0{,}5616 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}55{,}8°}$$

$$\underline{U}_q = \frac{|\underline{U}_4| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}}{0{,}5616 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}55{,}8°}} = \frac{|\underline{U}_4|}{0{,}5616} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}55{,}8°}$$

Mit Kenntnis der Zeigerlänge von $\underline{U}_q$ und des Betrages von 12 V könnte nun ein neuer Spannungsmaßstab berechnet werden. Das ist aber nicht erforderlich, da von den Spannungszeigern des oberen Zweiges lediglich die Relationen ihrer Zeigerlängen bekannt sein müssen.

Bild ÜA_2_8.4.B_1: Maßstäbliches Zeigerbild

Der Zeiger der Gesamtspannung wird nun um 90° gedreht und in den Punkt B verschoben (schwarz gestrichelte Linie im Bild ÜA_2_8.4.B_1). Zur weiteren Konstruktion sollte als Hilfsmittel ein THALES-Kreis eingezeichnet werden. Sein Durchmesser wird von der Gesamtspannung bestimmt.

Die geometrische Addition der Spannungszeiger $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ (in Phase) muss nun vom Anfangspunkt des Zeigers $\underline{U}_q$ über den THALES-Kreis zur Zeigerspitze von $\underline{U}_q$ ausgeführt werden. Es ergibt sich ein weiteres rechtwinkliges Dreieck (pinkfarbig im Bild ÜA_2_8.4.B_1) mit $\underline{U}_q$ als Hypotenuse.

Die Zeigerlängen von $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ sind aber nicht bekannt.

Mit Kenntnis der Widerstandswerte kann aber auf die Relation der Zeigerlängen geschlussfolgert werden. Der Zeiger $\underline{U}_1$ muss gemäß $R_1 = 30\ \Omega$ die doppelte Länge von $\underline{U}_2$ ($R_2 = R_1 / 2 = 15\ \Omega$) aufweisen.

Im Sinne einer einfachen grafischen Lösung wird folgende Maßnahme vorgeschlagen:

Man suche mit dem Lineal eine Gerade, die den Anfangspunkt von $\underline{U}_q$ mit dem THALES-Kreis verbindet. Diese Gerade muss von der gestrichelten Linie im Bild ÜA_2_8.4.B_1 so in zwei Teile geteilt werden, dass der obere Teil zwei Längeneinheiten ($|\underline{U}_1| \sim R_1$) und der untere Teil eine Längeneinheit ($|\underline{U}_2| \sim R_2$) erfasst. Zwischen den Zeigern $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ entsteht im Zeigerbild die Position des Punktes A. Durch die Verbindung zwischen A und B kann nun der Zeiger $\underline{U}_x$ eingezeichnet werden.

Die Verbindung der Zeigerspitze von $\underline{U}_2$ mit der Zeigerspitze von $\underline{U}_q$ liefert den Zeiger $\underline{U}_3$. Er eilt den Zeigern $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ um 90° voraus. Aus dem Zeigerbild werden folgende Zeigerlängen ermittelt:

$l_{12} \approx 5{,}5$ cm und $l_3 \approx 5{,}8$ cm.

Zu a) • **Bestimmung der Induktivität:**

Nach der Spannungsteilerregel gilt:

$$\frac{|\underline{U}_{12}|}{|\underline{U}_3|} = \frac{R_1 + R_2}{\omega L_3} \mathrel{\hat{=}} \frac{l_{12}}{l_3} \quad \text{bzw.:} \quad \frac{45\ \Omega}{\omega L_3} \mathrel{\hat{=}} \frac{5{,}5\text{ cm}}{5{,}8\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad L_3 = \frac{5{,}8}{5{,}5}\cdot\frac{R_1 + R_2}{2\pi f} = \frac{5{,}8}{5{,}5}\cdot\frac{45\ \Omega}{314\,\text{s}^{-1}} = 151\text{ mH}$$

Zu b) • **Bestimmung der Brückenspannung** (für die angegebene Vereinfachung)**:**

Maschensatz:

$\underline{U}_1 + \underline{U}_x - \underline{U}_4 = 0$

$\underline{U}_x = \underline{U}_4 - \underline{U}_1 = \underline{I}_4 \cdot R_4 - \underline{I}_1 \cdot R_1$

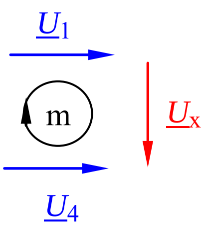


Bild ÜA_2_8.4.B_2:
Anwendung des Maschensatzes

$$\text{mit: } \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{R_1 + R_2 + \mathrm{j}X_3} = \frac{\underline{U}_q}{2R + \mathrm{j}R} \quad \text{und: } \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_q}{R_4 + \mathrm{j}X_5} = \frac{\underline{U}_q}{R - \mathrm{j}R}$$

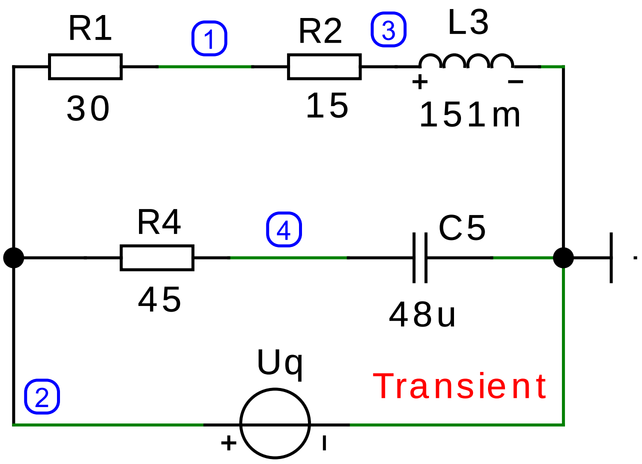
$$\underline{U}_x = \underline{U}_q \cdot \left(\frac{R}{R - \mathrm{j}R} - \frac{R}{2R + \mathrm{j}R}\right) = \underline{U}_q \cdot \left(\frac{1}{1-\mathrm{j}} - \frac{1}{2+\mathrm{j}}\right) = \underline{U}_q \cdot \left(\frac{1+\mathrm{j}}{2} - \frac{2-\mathrm{j}}{5}\right)$$

$$\underline{U}_x = \underline{U}_q \cdot (0{,}5 + \mathrm{j}0{,}5 - 0{,}4 + \mathrm{j}0{,}2) = \underline{U}_q \cdot (0{,}1 + \mathrm{j}0{,}7) = 0{,}707 \cdot \underline{U}_q \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}82°}$$

Durch die vorgegebene Vereinfachung steht jetzt $\underline{U}_x$ nicht mehr senkrecht auf $\underline{U}_q$!

• Probe der Zahlenwerte über eine MICROCAP-Simulation:

Anmerkung: Der Zeiger $\underline{U}_x$ (↓) soll senkrecht auf $\underline{U}_q$ stehen Für diesen Fall wurde die Induktivität L_3 aus dem Zeigerbild bestimmt. Wir wollen hier die Probe mit einer Transienten-Analyse im Bereich: 60 ms $\leq t \leq$ 100 ms durchführen.



$V(2) \mathrel{\hat{=}} u_q$

$V(1) - V(4) \mathrel{\hat{=}} u_x$

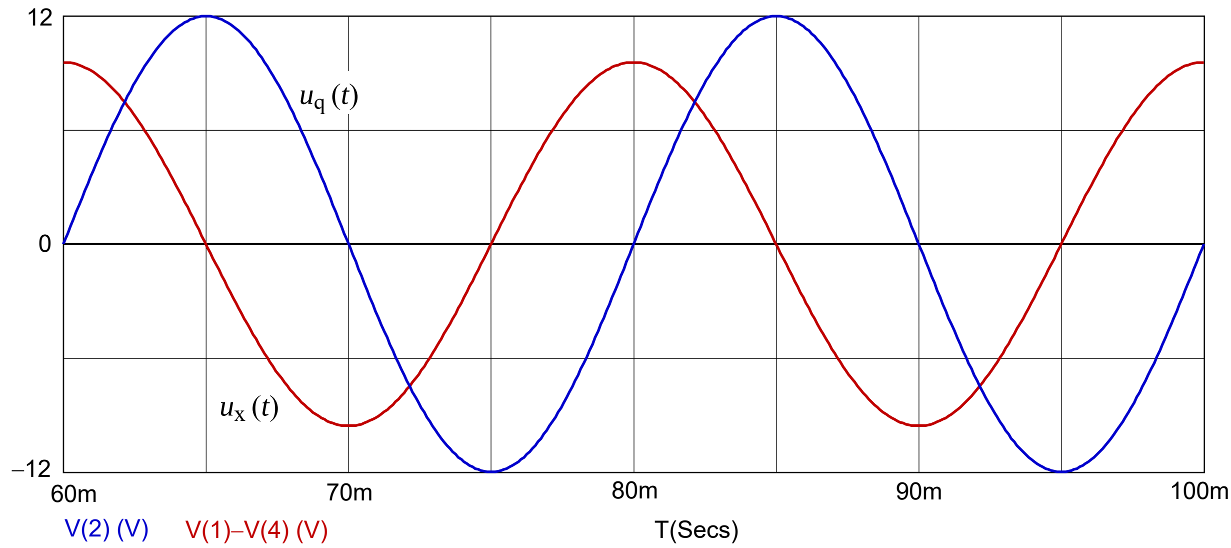


Bild ÜA_2_8.4.B_3: Schaltung (oben) undTransienten-Analyse (unten) zur Übungsaufgabe ÜA_2_8.4.B

Nach t_{Start} = 60 ms ist die Schaltung eingeschwungen. Die Periodendauer beträgt T = 20 ms (50 Hz). Die angestrebte Phasenverschiebung von 90° (⊥) erkennt man an zwei Sachverhalten:

1) Wenn die Quellenspannung u_q den Maximalwert erreicht, weist die Spannung über dem Querzweig der Brücke u_x einen Nulldurchgang auf (90°).

2) Der zeitliche Abstand zwischen den Maximalwerten von u_q und u_x oder auch der zeitliche Abstand zwischen den Nulldurchgängen von u_q und u_x beträgt 5 ms (also T / 4 oder 90°).

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Berechnen Sie den Innenwiderstand zwischen den Punkten A und B und bestimmen Sie über $\underline{U}_x$ den Kurzschlussstrom. Es gelten die unter b) genannten Vereinfachungen mit $R = |X| = 30\ \Omega$.

Lösung:

Zur Bestimmung des Innenwiderstandes muss die Spannungsquelle ($\underline{U}_q$) kurzgeschlossen werden.

$$\underline{Z}_i = R_1 // (R_2 + \mathrm{j}X_3) + R_4 // \mathrm{j}X_5 = [30 // (30 + \mathrm{j}30) + 30 // (-\mathrm{j}30)]\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{123} = [30 // (30 + \mathrm{j}30)]\ \Omega = 18{,}97\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\ \mathrm{j}18{,}43°}$$

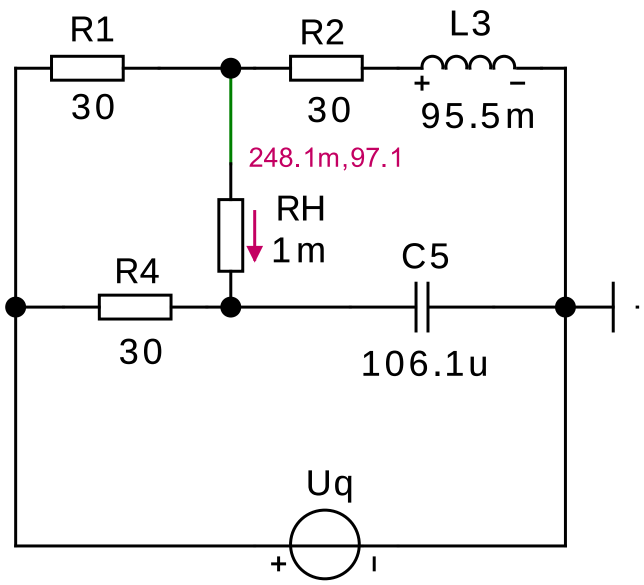
$$\underline{Z}_{45} = [30 // (-\mathrm{j}30)]\ \Omega = [15 - \mathrm{j}15]\ \Omega = 21{,}21\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\ -\mathrm{j}45°}$$

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_{123} + \underline{Z}_{45} = (18 + \mathrm{j}6)\ \Omega + (15 - \mathrm{j}15)\ \Omega = (33 - \mathrm{j}9)\ \Omega = 34{,}21\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\ -\mathrm{j}15{,}26°}$$

$$\underline{U}_x = 0{,}707 \cdot \underline{U}_q \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}82°} = 8{,}484\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}82°}$$

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_i} = \frac{8{,}5\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}81{,}8°}}{34{,}21\Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}15{,}26°}} \approx 248{,}47\,\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}97{,}06°}$$

• **Probe der Zahlenwerte über eine MICROCAP-Simulation:**



Der Hilfswiderstand R_H dient lediglich zur Messung von $\underline{I}_K$.

Ergebnis:

$$\underline{I}_K = 248{,}1\ \mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{\ 97{,}1°}$$

Bild ÜA_2_8.4.B_4: Bestimmung des Kurzschlussstromes mit der Dynamic-AC-Analyse

Ende der zusätzlichen Lösung