

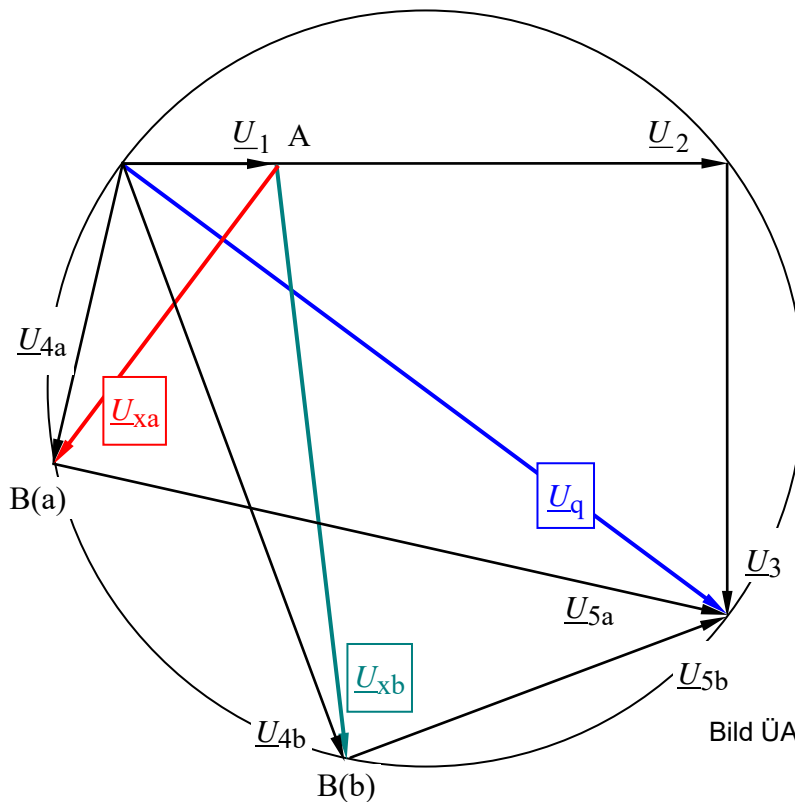
Lösung der Übungsaufgabe ÜA\_2\_8.4.C:

11.09.2022

• Konstruktion des Zeigerbildes:

Bezugszeiger:  $\underline{U}_1$  (Alle Spannungszählpfeile über den einzelnen BE zeigen nach rechts !)

Maßstab:  $1 \text{ V} \hat{=} 1 \text{ cm}$



Konstruktionsschritte:

- 1)  $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = \underline{U}_q$   
 mit:  $\underline{U}_3 \perp \downarrow (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)$
- 2) THALES-Kreis mit  $\emptyset |\underline{U}_q|$
- 3)  $\underline{U}_{xa} \perp \underline{U}_q$   
 von A auf THALES  $\rightarrow$  B
- 4)  $\underline{U}_{4a} + \underline{U}_{5a} = \underline{U}_q$   
 mit:  $\underline{U}_{5a} \perp \uparrow \underline{U}_{4a}$  (über B)

Bild ÜA\_2\_8.4.C\_1: Maßstäbliches Zeigerbild

Zu a) Spannungen für den Fall a)

$\Rightarrow$  aus dem Zeigerbild wird abgelesen:

$$\underline{U}_1 = 2 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} \quad \underline{U}_2 = 6 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} \quad \underline{U}_3 = 6 \text{ V} \cdot e^{-j90^\circ} \quad (\text{Geg.!!})$$

$$\underline{U}_{4a} = 4,1 \text{ V} \cdot e^{-j105^\circ} \quad \underline{U}_{5a} = 9,2 \text{ V} \cdot e^{-j15^\circ}$$

$$\underline{U}_q = 10 \text{ V} \cdot e^{-j37^\circ} \quad \underline{U}_{xa} = 5 \text{ V} \cdot e^{-j127^\circ} = 0,5 \underline{U}_q \cdot e^{-j90^\circ}$$

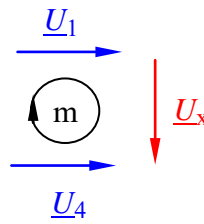
$$\frac{U_{4a}}{U_{5a}} = \frac{R_4}{X_{5a}} \hat{=} \frac{l_4}{l_{5a}} \approx \frac{4,1}{9,2} \quad \Rightarrow \quad X_{5a} \approx R_4 \cdot \frac{9,2}{4,1} \approx 60 \Omega \cdot \frac{9,2}{4,1} = 135 \Omega \quad \Rightarrow \quad L_{5a} = \frac{X_{5a}}{2\pi f} = 429 \text{ mH}$$

Zu b1) **Rechnerische Lösung:**

Maschensatz:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_{xb} - \underline{U}_4 = 0$$

$$\underline{U}_{xb} = \underline{U}_4 - \underline{U}_1 = \underline{I}_4 \cdot R_4 - \underline{I}_1 \cdot R_1$$

Bild ÜA\_2\_8.4.C\_2:  
Anwendung des Maschensatzes

$$\text{mit: } \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{R_1 + R_2 + jX_3} \quad \text{und: } \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_q}{R_4 + jX_5}$$

$$\underline{U}_{xb} = \underline{U}_q \cdot \frac{R_4}{R_4 + jX_5} - \underline{U}_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + jX_3} \quad \text{bzw.:} \quad \frac{\underline{U}_{xb}}{\underline{U}_q} = \frac{6R}{6R + jX_{5b}} - \frac{R}{4R - j3R}$$

$$\text{mit: } X_{5b} = n \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_{xb}}{\underline{U}_q} = \frac{6}{6 + jn} - \frac{1}{4 - j3} = \frac{36 - j6n}{36 + n^2} - \frac{4 + j3}{25} = \frac{36}{36 + n^2} - \frac{4}{25} - j \left( \frac{3}{25} + \frac{6n}{36 + n^2} \right)$$

$$\underline{U}_{xb} \text{ steht mit } -45^\circ \text{ auf } \underline{U}_q, \text{ wenn: } \operatorname{Re} \left\{ \frac{\underline{U}_{xb}}{\underline{U}_q} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_{xb}}{\underline{U}_q} \right\}$$

$$36 - 0,16(36 + n^2) = 0,12(36 + n^2) + 6n$$

$$36 - 0,28(36 + n^2) - 6n = 0 \quad | :(-0,28) \quad \text{bzw.:} \quad 36 + n^2 + 21,43n - 128,57 = 0$$

$$n^2 + 21,4n - 92,6 = 0$$

$$n_{1/2} = -\frac{21,4}{2} \pm \sqrt{\frac{21,4^2}{4} + 92,6} = -10,7 \pm \sqrt{207,1} \quad \Rightarrow \quad n = 3,7$$

$$X_{5b} = n \cdot R = 3,7 \cdot 10 \, \Omega = 37 \, \Omega \quad \Rightarrow \quad L_{5b} = \frac{X_{5b}}{2\pi f} = 117,8 \text{ mH}$$

Zu b2) **Grafische Lösung** (Werte aus dem Zeigerbild):

$$|\underline{U}_{4b}| = 8,4 \text{ V} \quad |\underline{U}_{5b}| = 5,5 \text{ V} \quad |\underline{U}_{xb}| = 8 \text{ V}$$

$$\frac{U_{4b}}{U_{5b}} = \frac{R_4}{X_{5b}} \hat{=} \frac{I_4}{I_{5b}} \approx \frac{8,4}{5,5} \quad \Rightarrow \quad X_{5b} \approx R_4 \cdot \frac{5,5}{8,4} = 40 \, \Omega$$

Zu c) **Berechnung ausgewählter Größen:**

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_q \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_3}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \underline{U}_q \cdot \frac{1}{1 + j\omega C \cdot 2R} = \underline{U}_q \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 4R^2}} e^{-j \arctan \omega C 2R}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_q}{R_4 + j\omega L_5} = \underline{U}_q \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega L}{R}}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_4} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} \cdot \frac{\underline{U}_q}{\underline{U}_4} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} \cdot \frac{R_4 + j\omega L_5}{R_4} \Rightarrow \varphi_{2,4} = +\arctan \frac{1}{\omega C 2R} + \arctan \frac{\omega L}{R}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_4 + j\omega L_5} + \frac{1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{2R + j\frac{1}{\omega C}}{4R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{2R}{4R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \left( \frac{\frac{1}{\omega C}}{4R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{2R \cdot \omega^2 C^2}{1 + 4R^2 \omega^2 C^2} + j \left( \frac{\omega C}{1 + 4R^2 \omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_q \cdot \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = \underline{U}_q \cdot \left( \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{2R \cdot \omega^2 C^2}{1 + 4R^2 \omega^2 C^2} \right)$$

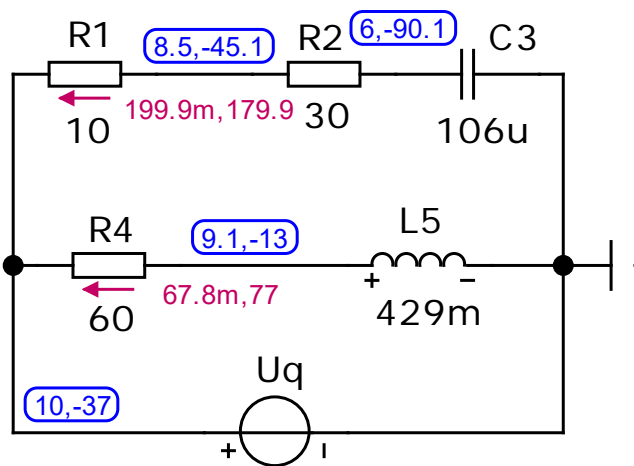
Ende der offiziellen Lösung

• **Zusatzaufgabe:** Probe der Lösungen des Zeigerbildes mit einer MICROCAP-Simulation:

*Anmerkung:* Zur Vereinfachung der Simulationsergebnisse wird der eingegebene Maximalwert von  $\hat{U}_q$  als ein Effektivwert interpretiert. Dann sind alle angezeigten Werte auch Effektivwerte. Das erspart die Umrechnung:  $\hat{U}_x$  in  $U_{x,eff}$  bzw.  $\hat{I}_x$  in  $I_{x,eff}$ . Bei einer sinusförmigen Einspeisung ist diese Überlegung zulässig (sonst allerdings nicht!).

Zu a): Aus dem Zeigerbild:  $\underline{U}_q = 10\text{ V} \cdot e^{-j37^\circ}$  und  $L_{5a} = 429\text{ mH}$

Der Strom  $\underline{I}_1$  hat einen Betrag von 200 mA und einen Nullphasenwinkel von  $\varphi_1 \approx 180^\circ$ . Das entspricht einem Winkel von  $0^\circ$ , wenn man den Zählpfeil dreht. Alle Winkel werden (wie im Zeigerbild) auf den Bezugszeiger  $\underline{U}_1$  bezogen. Dann hat die Gesamtspannung einen Nullphasenwinkel von  $\varphi_{Uq} = -37^\circ$ .



Für die Simulation wird eine Betriebsfrequenz von  $f = 50\text{ Hz}$  gewählt:  
 $\Rightarrow$  Dynamic-AC-Sweep (feste Frequenz!)

Ergebnisse (gerundet):

$$\underline{I}_1 = 200\text{ mA} \cdot e^{j180^\circ} = 200\text{ mA} \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{I}_4 = 67,8\text{ mA} \cdot e^{j77^\circ}$$

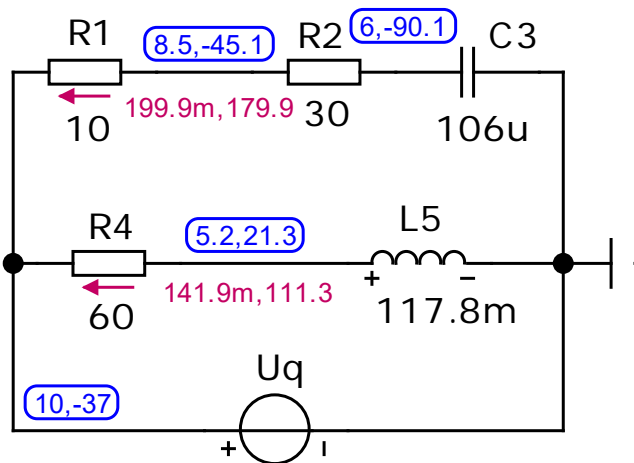
$$\underline{U}_3 = 6\text{ V} \cdot e^{-j90^\circ} \quad (\text{Geg. !})$$

$$\underline{U}_5 = 9,1\text{ V} \cdot e^{-j13^\circ}$$

$$\underline{U}_x(\downarrow) = \underline{U}_{23}(\rightarrow) - \underline{U}_5(\rightarrow)$$

Bild ÜA\_2\_8.4.C\_3: Ergebnisse der Dynamic-AC-Analyse für den Fall a)

Zu b): Aus dem Zeigerbild:  $\underline{U}_q = 10\text{ V} \cdot e^{-j37^\circ}$  und  $L_{5b} = 117,8\text{ mH}$



Ergebnisse (gerundet):

An den Spannungen und dem Strom im oberen Zweig ändert sich nichts.

$$\underline{I}_4 = 142\text{ mA} \cdot e^{j111^\circ}$$

$$\underline{U}_5 = 5,2\text{ V} \cdot e^{j21,3^\circ}$$

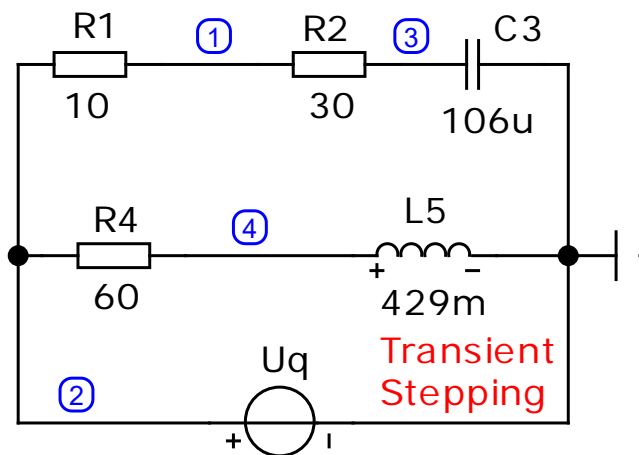
$$\underline{U}_x(\downarrow) = \underline{U}_{23}(\rightarrow) - \underline{U}_5(\rightarrow)$$

Bild ÜA\_2\_8.4.C\_4: Ergebnisse der Dynamic-AC-Analyse für den Fall b)

• Proben zu a) und b) für die Spannungen  $\underline{U}_x(\downarrow)$  im Querzweig:

*Anmerkung:* Der Zeiger  $\underline{U}_x(\downarrow)$  soll bei a) senkrecht auf  $\underline{U}_q$  stehen. Im Fall b) eilt die Spannung  $\underline{U}_x$  um  $45^\circ$  gegenüber  $\underline{U}_q$  nach. Für beide Fälle wurde die Induktivität  $L_5$  aus dem Zeigerbild bestimmt. Wir wollen diese Probe mit einer Transienten-Analyse durchführen.

Da es um einen Vergleich von Winkeln geht, verwenden wir  $\underline{U}_q$  als Bezugszeiger ( $\varphi_{U_q} = 0$ ). Durch die Verwendung der *Stepping*-Funktion als Bestandteil der Transienten-Analyse gelingt die Darstellung aller drei Zeitfunktionen ( $u_q$ ,  $u_{xa}$  und  $u_{xb}$ ) in einem gemeinsamen Diagramm.



Transient: 60 ms ≤ t ≤ 100 ms  
 Stepping:  
 Step What=L5  
 List= 117.8m,429m  
  
 V(2) ≐  $u_q$   
 V(1) - V(4) ≐  $u_x$

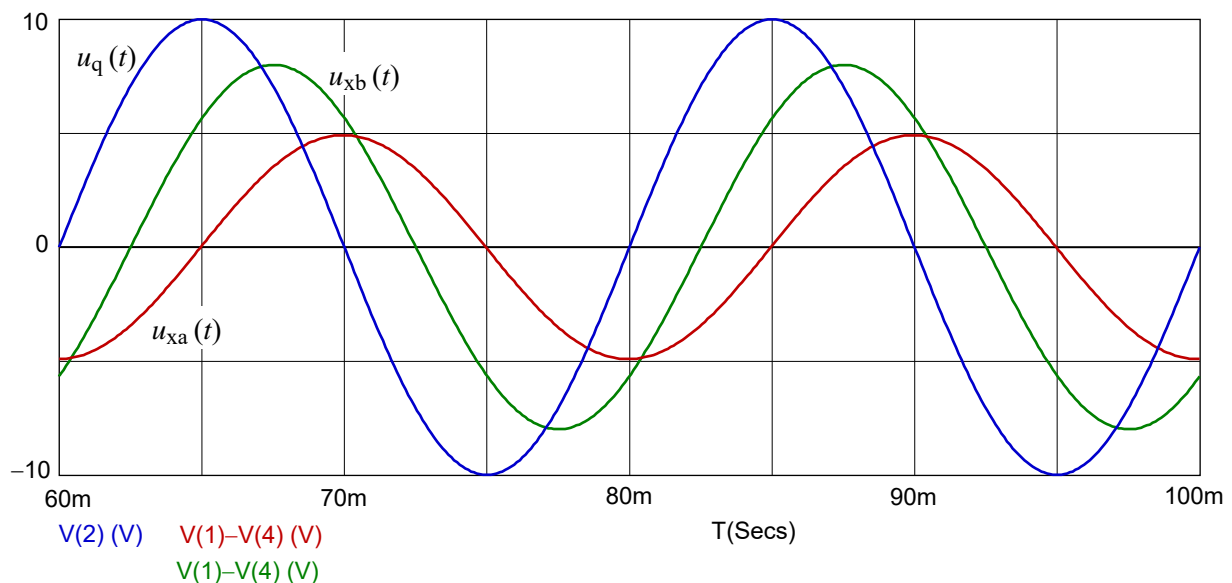


Bild ÜA\_2\_8.4.C\_5: Ergebnisse der Transienten-Analyse für die Fälle a) und b)

Nach  $t_{\text{Start}} = 60$  ms ist die Schaltung eingeschwungen. Die Periodendauer beträgt  $T = 20$  ms (50 Hz). Die angestrebte Phasenverschiebung erkennt man an mehreren Sachverhalten (vgl. auch ÜA\_2\_8.4.B).

Im vorliegenden Fall betrachten wir die Nulldurchgänge (z.B. zwischen 80 ms und 85 ms). Bei 80 ms hat die Quellenspannung ihren Nulldurchgang beim Wechsel von negativen zu positiven Funktionswerten ( $\varphi_{U_q} = 0$ ). Es folgen die Nulldurchgänge von  $u_{xb}$  nach  $t_b = 2,5$  ms und von  $u_{xa}$  nach  $t_a = 5$  ms. Der zeitliche Abstand zwischen diesen Nulldurchgängen ist ein Maß für den jeweiligen Winkel.

$$\frac{t_x}{T} = \frac{x^\circ}{360^\circ} \quad \text{bzw.:} \quad x^\circ = 360^\circ \cdot \frac{t_x}{T} \quad \text{Für } u_{xb} \text{ gilt: } 360^\circ \cdot \frac{t_{xb}}{T} = 360^\circ \cdot \frac{2,5}{20} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\text{Für } u_{xa} \text{ erhalten: } 360^\circ \cdot \frac{t_{xa}}{T} = 360^\circ \cdot \frac{5}{20} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$