

Lösung der Übungsaufgabe ÜA_2_9.3.B:

09.09.2022

Zu a) \underline{U}_3 in der Exponentialform: \Rightarrow Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_q} = \frac{R_4 // \frac{1}{j\omega C_3}}{j\omega L_5 + R_4 // \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{\frac{R_4}{1 + j\omega C_3 R_4}}{j\omega L_5 + \frac{R_4}{1 + j\omega C_3 R_4}} = \frac{R_4}{j\omega L_5 \cdot (1 + j\omega C_3 R_4) + R_4}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_q \cdot \frac{R}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} = \underline{U}_q \cdot \frac{R}{R - 0,5R + j\omega L} = \underline{U}_q \cdot \frac{R}{0,5R + j\omega L}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_q \cdot \frac{R}{\sqrt{0,25R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega L}{0,5R}}$$

Zu b) \underline{I}_2 in der kartesischen Form: \Rightarrow OHMSches Gesetz

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_q}{R_1 + j\omega L_2} = \underline{U}_q \cdot \left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

Zu c) Winkel zwischen \underline{U}_2 und $\underline{U}_4 \Rightarrow$ Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_4} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} \cdot \frac{\underline{U}_q}{\underline{U}_4} = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} \cdot \frac{j\omega L_5 + R_4 // \frac{1}{j\omega C_3}}{R_4 // \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}}{\frac{R}{1 + j\omega CR}}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_4} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{j\omega L \cdot (1 + j\omega CR) + R}{R} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{j\omega L - \omega^2 LCR + R}{R} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{j\omega L + 0,5R}{R}$$

$$\varphi_{2,4} = 90^\circ + \arctan \frac{\omega L}{0,5R} - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Zusatzaufgabe:

Lösen Sie die Aufgabenstellung zu a) mit folgenden Zahlenwerten:

Geg.: $\underline{U}_q = 10 \text{ V} \cdot e^{j0}$ sowie: $R_1 = R_4 = R = 80 \Omega$; $|X_3| = |X_C| = 120 \Omega$ und $X_4 = X_5 = X_L = 60 \Omega$.

Diskutieren Sie das Ergebnis und weisen Sie die Richtigkeit der Berechnung nach.

- Kontrolle der Randbedingungen:

$$\omega^2 LC = \omega L \cdot \omega C = \frac{X_L}{|X_C|} = \frac{60}{120} = 0,5 \quad \text{vgl. Gleich. (10.16): } \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Was bedeutet das? Die Schaltung wird mit einer Frequenz betrieben, die der halben Resonanzfrequenz der Schaltung entspricht (eine Oktave unterhalb f_0). Diese Thematik ist Gegenstand des Kap. 10.

Lösung:

In der allgemeinen Lösung zu a) kommt die Kapazität nicht vor. Die Information zu C_3 (bzw. $|X_3|$) wird über die Randbedingung $\omega^2 LC = 0,5$ mit in die Berechnung der allgemeinen Lösung eingebracht.

Wir berechnen jetzt erst einmal den Zahlenwert von \underline{U}_3 über die allgemeine Lösung:

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_q \cdot \frac{R}{\sqrt{0,25R^2 + X_L^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega L}{0,5R}} = 10 \text{ V} \cdot \frac{80}{\sqrt{0,25 \cdot 80^2 + 60^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{60}{40}}$$

$$\underline{U}_3 = 10 \text{ V} \cdot \frac{80}{\sqrt{1600 + 3600}} \cdot e^{-j \arctan 1,5} = 10 \text{ V} \cdot \frac{80}{72,11} \cdot e^{-j 56,3^\circ} = 11,09 \text{ V} \cdot e^{-j 56,3^\circ}$$

Hat sich hier ein Rechenfehler eingeschlichen? Der Betrag der Teilspannung $|\underline{U}_3|$ ist doch größer als der Betrag der Gesamtspannung $|\underline{U}_q|$.

Zur Überprüfung dieses Sachverhaltes ist ein neuer Ansatz (ohne die Randbedingung) sinnvoll:

$$\text{Zu aZ) } \underline{U}_3 = \underline{U}_q \cdot \frac{R_4 // jX_3}{jX_5 + R_4 // jX_3} = 10 \text{ V} \cdot \frac{80 // (-j120)}{j60 + 80 // (-j120)} = 10 \text{ V} \cdot \frac{66,56 \cdot e^{-j33,7^\circ}}{59,99 \cdot e^{j22,6^\circ}} = 11,09 \text{ V} \cdot e^{-j56,3^\circ}$$

Wir kommen wieder zum gleichen Ergebnis. Der Betrag der Teilspannung $|\underline{U}_3|$ ist größer als der Betrag der Gesamtspannung $|\underline{U}_q|$. Warum ist das so?

Diskussion:

Es handelt sich um den Effekt der Spannungsüberhöhung. Der untere Zweig des Bildes ÜA_2_9.3.B wirkt als Reihenschwingkreis (realer Kondensator in Reihe zu einer idealen Spule).

Ausführliche Erklärungen und Berechnungen dazu finden Sie im:

Lehrbuch [14] – Lehrbeispiel 9.4 und im Abschnitt 10.3.

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:

Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 9.3 und 9.5 bis 9.8

sowie zur Zusatzaufgabe – Berechnungsbeispiele 10.13 und 10.14.