Lösung der Übungsaufgabe ÜA_2_9.4.A:

- **Lösungsansatz:** $\Rightarrow$ Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{R_2 // j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_1 + R_2 // j\omega L_2} = \frac{j\omega L_2 R_2}{R_1 R_2 + j\omega L_2 R_1 + j\omega L_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 + j\omega L_2 R_2}$$

$$= \frac{j\omega LR}{R^2 - \omega^2 L^2 + 3j\omega LR} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{R}{\omega L}\right)}$$

- **Dimensionierung:**

1. Variante für $\varphi_{x1} = -45°$:

$$\varphi_{x1} = \varphi_a - \varphi_e = -45°, \text{wenn: } \operatorname{Im}\{\text{Nenner}\} = \operatorname{Re}\{\text{Nenner}\}$$

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{R}{\omega L} = \frac{\omega^2 L^2 - R^2}{\omega LR} = 3 \qquad \text{bzw.: } \omega^2 - \omega\frac{3R}{L} - \frac{R^2}{L^2} = 0 \qquad \text{mit: } \omega = \omega_x$$

$$\omega_{x1,2} = \frac{3R}{2L} \pm \sqrt{\frac{9R^2}{4L^2} + \frac{4R^2}{4L^2}} = \frac{3R \pm \sqrt{13}R}{2L}$$

$$\omega_{x1} = \frac{3R + 3{,}606R}{2L} = 3{,}303\,\frac{R}{L}$$ (Die negative Lösung ist nicht praktikabel !)

---

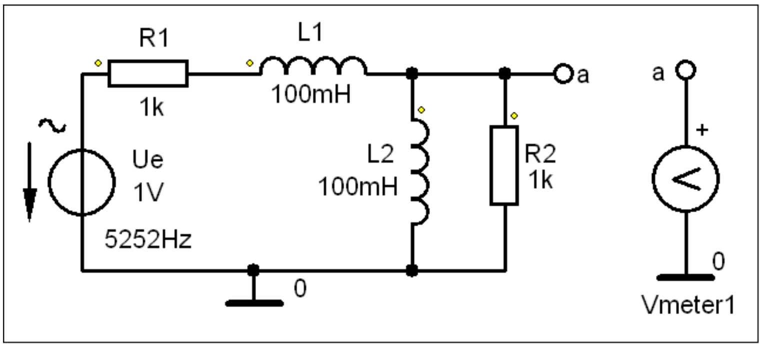
2. Variante für $\varphi_{x2} = +45°$:

$$\varphi_{x2} = \varphi_a - \varphi_e = +45°, \text{wenn: } -\operatorname{Im}\{\text{Nenner}\} = \operatorname{Re}\{\text{Nenner}\}$$

$$\omega_{x2} = 0{,}3 \cdot \frac{R}{L}$$

• Probe der Zahlenwerte über eine PSPICE-Simulation (siehe auch [11] – Abschn. 1.3.3):

1. Variante für $\varphi_{x1} = -45°$:



Gewählt:
$R = 1\ \text{k}\Omega$
$L = 100\ \text{mH}$

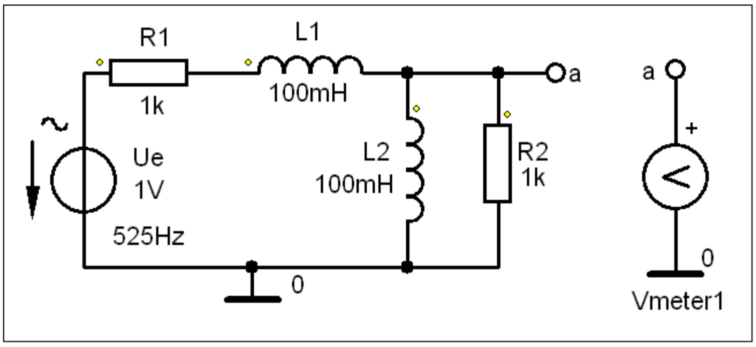
$$f_{x1} = \frac{3{,}3}{2\pi} \cdot \frac{R}{L} = 5252\ \text{Hz}$$

Lösung:
siehe Output-File

Bild ÜA_2_9.4.A_1: Simulationsschaltung für die 1. Variante

Output – File:			**Bedeutung:**
FREQ	VM(a,0)	VP(a,0)	$\underline{U}_{a1}$
5.252E+03	2.358E-01	-4.497E+01	236 mV ; $\angle -45°$

2. Variante für $\varphi_{x2} = +45°$:



Gewählt:
$R = 1\ \text{k}\Omega$
$L = 100\ \text{mH}$

$$f_{x2} = \frac{0{,}3}{2\pi} \cdot \frac{R}{L} \approx 525\ \text{Hz}$$

Lösung:
siehe Output-File

Bild ÜA_2_9.4.A_2: Simulationsschaltung für die 2. Variante

Output – File:			**Bedeutung:**
FREQ	VM(a,0)	VP(a,0)	$\underline{U}_{a2}$
5.250E+02	2.477E-01	4.200E+01	248 mV ; $\angle +42°$

Die Proben stimmen bis auf kleine Abweichungen, die durch Rundungsfehler $(\sqrt{13} \approx 3{,}6)$ entstehen.

Ende dieser Lösung

Zusatzaufgabe:

Bei welcher Kreisfrequenz ist der Winkel zwischen der Ausgangsspannung und der Eingangsspannung gleich null?

Lösung:

Wir verwenden den Lösungsansatz zur originalen Aufgabenstellung:

$$\frac{\underline{U}_{\mathrm{a}}}{\underline{U}_{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{j}\omega LR}{R^2 - \omega^2 L^2 + 3\mathrm{j}\omega LR} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}\cdot\left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{R}{\omega L}\right)}$$

Der Winkel wird null, wenn der Imaginärteil des Nenners null ist. Dann gilt:

$$\frac{\omega_{\mathrm{x3}} L}{R} = \frac{R}{\omega_{\mathrm{x3}} L} \qquad \text{bzw.:} \quad \omega_{\mathrm{x3}}^2 = \frac{R^2}{L^2} \qquad \text{oder:} \quad \omega_{\mathrm{x3}} = \frac{R}{L}$$

Die Schaltung wirkt in diesem Fall wie ein ohmscher Spannungsteiler mit einem Teilungsfaktor:

$$\left.\frac{\underline{U}_{\mathrm{a}}}{\underline{U}_{\mathrm{e}}}\right|_{\omega_{\mathrm{x3}}} = \frac{1}{3}$$

Diskussion:

Die Kombination $R_1 - L_1$ besitzt eine Tiefpass-Charakteristik. Die Kombination $R_2 - L_2$ weist ein Hochpass-Verhalten auf. Der gesamte Übertragungsvierpol zeigt dann ein Bandpass-Verhalten (allerdings mit der genannten Dämpfung).

Das Maximum im Funktionsverlauf entsteht bei der angegebenen Dimensionierung ($R_1 = R_2 = R$ und $L_1 = L_2 = L$), wenn der Vierpol mit $\omega = \omega_{\mathrm{x3}}$ betrieben wird.

Hinweis: Aufgaben mit vergleichbaren Inhalten finden Sie im:
Übungsbuch [14] – Berechnungsbeispiele 9.10 und 9.11 sowie 9.13 und 9.14.

Eine vergleichbare Lösung zur Zusatzaufgabe: [14] – Berechnungsbeispiel 10.16.

Ende der zusätzlichen Lösung