Lösung der Übungsaufgabe ÜA_3_16.4.A:

3. Auflage: ÜA_3_16.3.A:

1. Lösungsvariante: Anwendung der Spannungs- und Stromteilerregel für $\underline{A}_{11}$ und $\underline{A}_{22}$

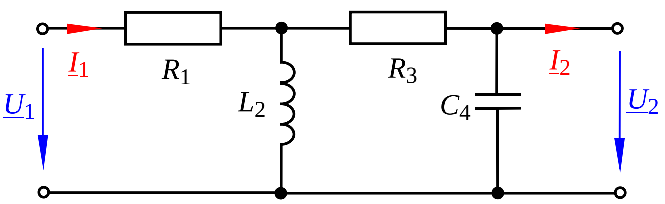

Bild ÜA_3_16.4.A_1:
Darstellung im Ketten-ZPS

• Berechnung der Kettenparameter:

$$\underline{A}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_4} + R_3}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}} \cdot \frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_2 // \left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_4} + R_3\right)}{\mathrm{j}\omega L_2 // \left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_4} + R_3\right)}$$

Vereinfachungen:
$R_1 = R_3 = R$
$L_2 = L$
$C_4 = C$

$$\underline{A}_{11} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \cdot \frac{R + \mathrm{j}\omega L // \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{\mathrm{j}\omega L // \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}$$

$$\underline{A}_{11} = \mathrm{j}\omega C \cdot \frac{R \cdot \left(R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right) + \mathrm{j}\omega L \cdot \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{A}_{11} = \frac{C}{L}\left[R^2 + \mathrm{j}\omega LR + \frac{R}{\mathrm{j}\omega C} + \mathrm{j}\omega LR + \frac{L}{C}\right] = 1 + \frac{R^2 C}{L} + \mathrm{j}\left(2\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right)$$

$$\underline{A}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{\mathrm{j}\omega L_2 + R_3}{\mathrm{j}\omega L_2} = \frac{\mathrm{j}\omega L + R}{\mathrm{j}\omega L} = 1 - \mathrm{j}\frac{R}{\omega L}$$

• Berechnung der Eingangswiderstände:

$$\underline{Z}_{1\mathrm{L}} = R_1 + \mathrm{j}\omega L_2 // \left(R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}\right)$$

$$\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = R_1 + \mathrm{j}\omega L_2 // R_3$$

• Umrechnung der Eingangswiderstände in die Exponentialform:

$$\underline{Z}_{1\mathrm{L}} = R + \mathrm{j}\omega L // \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \right) = R + \frac{\mathrm{j}\omega L \cdot \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \right)}{R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

$$\underline{Z}_{1\mathrm{L}} = \frac{R^2 + \mathrm{j}\omega LR + \frac{R}{\mathrm{j}\omega C} + \mathrm{j}\omega LR + \frac{L}{C}}{R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \cdot \frac{\mathrm{j}\omega C}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{R - \omega^2 LCR \cdot 2 + \mathrm{j}\left(\omega CR^2 + \omega L\right)}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega CR}$$

$$\underline{Z}_{1\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{\left(R - \omega^2 LCR \cdot 2\right)^2 + \left(\omega CR^2 + \omega L\right)^2}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\arctan\frac{\omega CR^2 + \omega L}{R - \omega^2 LCR \cdot 2} - \arctan\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} \right)}$$

$$\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = R + \mathrm{j}\omega L // R = R + \frac{\mathrm{j}\omega LR}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{R^2 + \mathrm{j}\omega LR + \mathrm{j}\omega LR}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = \frac{R^2 + \mathrm{j}\omega L 2R}{R + \mathrm{j}\omega L} = \sqrt{\frac{R^4 + \omega^2 L^2 4R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\arctan\frac{2\omega L}{R} - \arctan\frac{\omega L}{R} \right)}$$

2. Lösungsvariante: Kettenparameter über Elementarvierpole berechnen

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}\omega C_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ausmultiplizieren (z.B. über das Schema nach FALK):

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{R^2 C}{L} + \mathrm{j}\omega C 2R - \mathrm{j}\frac{R}{\omega L} \qquad \underline{A}_{12} = 2R - \mathrm{j}\frac{R^2}{\omega L}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{RC}{L} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \qquad \underline{A}_{22} = 1 - \mathrm{j}\frac{R}{\omega L}$$

$\underline{Z}_{1\mathrm{L}} = \dfrac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$ (einsetzen $\rightarrow$ Lösung siehe 1. Variante)

$\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = \dfrac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \dfrac{\frac{2R\omega L - \mathrm{j}R^2}{\omega L}}{\frac{\omega L - \mathrm{j}R}{\omega L}} = \dfrac{2R\omega L - \mathrm{j}R^2}{\omega L - \mathrm{j}R} \cdot \dfrac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}} = \dfrac{R^2 + \mathrm{j}\omega L 2R}{R + \mathrm{j}\omega L}$ (vgl. Lösung in der 1. Variante)

Ende dieser Lösung