

3. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

3.1 Lineare Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} 5x^2 + 2x + \frac{1}{x} = 17 \\ 5x + 2x + \frac{1}{x} = 17 \\ 5x + 2x + x = 17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{keine lineare Gleichung} \\ \text{keine lineare Gleichung} \\ \text{lineare Gleichung} \end{array}$$

Wenn x nur in Potenzen mit Exponent 1 auftritt, liegt eine lineare Gleichung vor.

1. Fall:

$$2x + 5 = 8x + 12 \quad | -8x - 5$$

$$-6x = 7$$

$$x = -\frac{7}{6}$$

eine Lösung

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{7}{6} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{7}{6} \right\}$$

Probe machen!!

2. Fall:

$$2x + 7 = 2x - 6 \quad | -2x - 7$$

$$0 = -13$$

keine Lösung

$$\mathbb{L} = \{ \} = \emptyset$$

3. Fall:

$$2x + 4 = 5x + 3 - 3x + 1$$

$$2x + 4 = 2x + 4$$

$$4 = 4$$

$$0 = 0$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{R}$$

unendlich viele Lösungen

(für unendlich große Grundmenge von x)

Gleichung allgemeingültig

zu Fall 1:

Grundmenge von x : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$x = -\frac{7}{6}$$

$$\mathbb{L} = \{ \}$$

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Anwendung: 6 Fl. O-Soft und 6 Fl. A-Soft 10 €

4 Fl. O-Soft und 8 Fl. A-Soft 12 €

x

y

$$6x + 6y = 10 \quad | : 2$$

$$4x + 8y = 12 \quad | : 4$$

$$\text{I} \quad 3x + 3y = 5$$

$$\text{II} \quad x + 2y = 3$$

II nach x auflösen: $x = 3 - 2y$

Term in I einsetzen: $3(3 - 2y) + 3y = 5$

$$9 - 6y + 3y = 5$$

$$y = \frac{4}{3}$$

y in Gleichung für x einsetzen: $x = 3 - 2 \cdot \frac{4}{3}$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\underline{II} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) \right\} = \left\{ x, y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3} \right\}$$

Probe!

Lo^sungen in beide Ausgangsgleichungen einsetzen

1. Lösungsmethode:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -4x + 6y = -3 \\ \text{II} \quad \textcircled{x} = -2y + 6 \end{array}$$

Lösungsmethode: Der Term für x aus II wird in I eingesetzt

$$\Rightarrow -4(-2y + 6) + 6y = -3$$

$$8y - 24 + 6y = -3$$

$$14y = 21$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = -2 \cdot \frac{3}{2} + 6$$

$$x = 3$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(3, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

eine Lösung

Probe: $-4 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{3}{2} = -3$

$$-12 + 9 = -3$$

$$-3 = -3 \quad \checkmark$$

$$3 = -2 \cdot \frac{3}{2} + 6$$

$$3 = -3 + 6$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

2. Lösungsmethode

$$\text{I } 2y = -4 + 3x$$

$$\text{II } 2y = 2 + 3x$$

Lösungsmethode: rechte Seiten gleichsetzen

$$-4 + 3x = 2 + 3x \quad | -3x$$

$$-4 = 2$$

$$\underline{\Pi} = \{ \}$$

keine Lösung

3. Lösungsmethode:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 4x & + 2y = 3 \\ \text{II} & -28x & - 14y = -21 \end{array}$$

Lösungsmethode: Geeignet mit Zahlen multiplizieren und dann
Gleichungen addieren, um eine Unbekannte zu eliminieren

$$\begin{array}{lcl} \text{I}' & 4x & + 2y = 3 \\ \text{II}' & -4x & - 2y = -3 \end{array}$$

$$\text{I}' + \text{II}' \quad 0 = 0$$

unendlich viele Lösungen für x und y ,
wobei x und y die Gleichung $4x + 2y = 3$ erfüllen müssen

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{ x, y \in \mathbb{R} \mid 4x + 2y = 3 \} \\ &= \{ x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x + \frac{3}{2} \} \end{aligned}$$

Beispiele:

1) Die Staaten Krisenien und Minusien haben Schulden.

Übernimmt Krisenien von Minusien 5 Milliarden, so hat Krisenien doppelt so viel Schulden wie Minusien.

Gibt Krisenien 3 Milliarden an Minusien ab, so haben beide gleich viele Schulden.

Wie viele Schulden hat jedes der beiden Länder? k, m

$$k + 5 = 2(m - 5)$$

$$k - 3 = m + 3$$

$$k + 5 = 2m - 10$$

$$k - 3 = m + 3$$

$$\text{I} \quad k - 2m = -15$$

$$\text{II} \quad k - m = 6$$

$$\text{I} - \text{II} \quad -m = -21$$

$$\underline{m = 21}$$

$$\Rightarrow k - 21 = 6$$

$$\underline{k = 27}$$

2) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10.
Vertauscht man die beiden Ziffern, erhält man eine
um 54 größere Zahl.

xy

$$x + y = 10$$

$$10x + y = 10y + x - 54$$

$$\text{I} \quad x + y = 10$$

$$\text{II} \quad 9x - 9y = -54 \quad | : 9$$

$$\text{I}' \quad x + y = 10$$

$$\text{II}' \quad x - y = -6$$

$$\text{I}' + \text{II}' \quad 2x = 4$$

$$x = 2$$

Einsetzen $y = 8$

Zahl 28

3.1.3 Grafische Darstellung

i) Eine lineare Gleichung

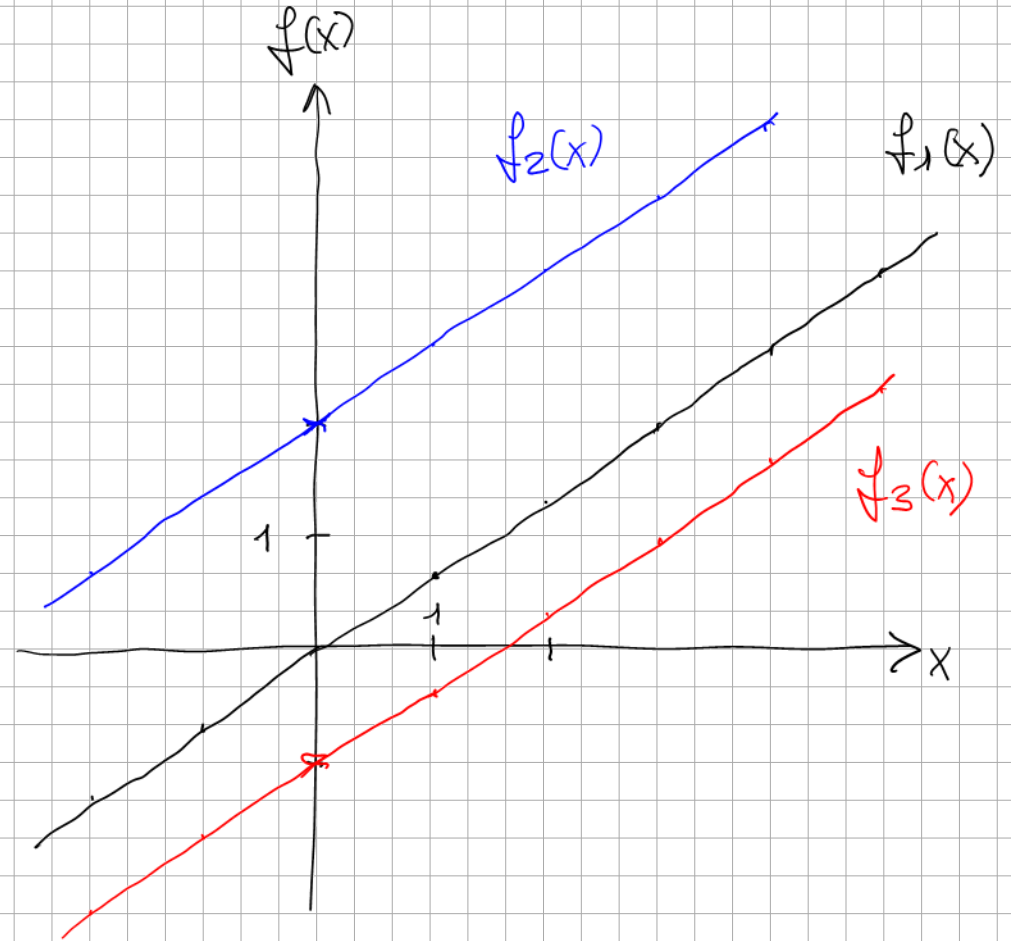
Gleichung $2x - 3y = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$$

$$f_1(x) = \frac{2}{3}x$$

$$f_2(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

$$f_3(x) = \frac{2}{3}x - 1$$



$$f_1(x) = \frac{2}{3}x$$

$$f_4(x) = 2x$$

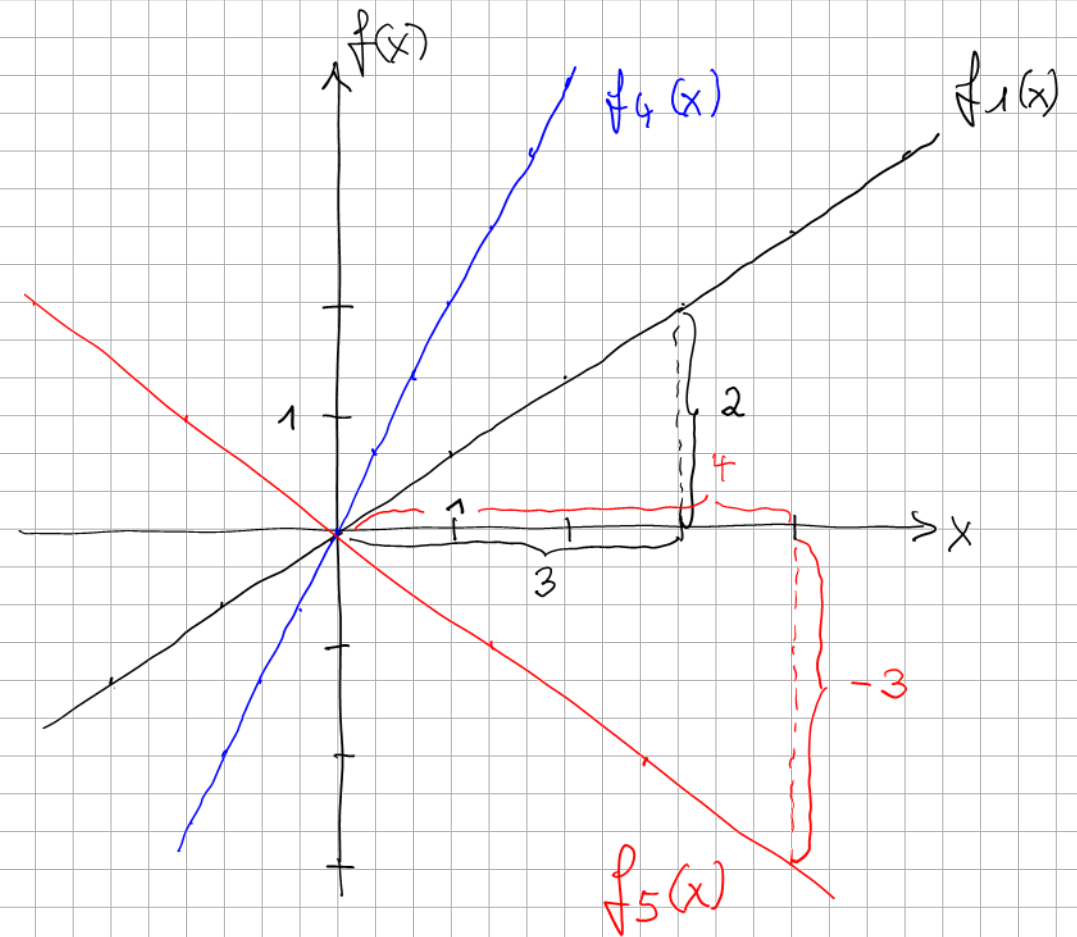
$$f_5(x) = -\frac{3}{4}x$$

Steigung ist positiv

⇒ Es ist eine steigende Gerade.

Steigung ist negativ

⇒ Es ist eine fallende Gerade.



Lineare Funktion

$$f(x) = mx + b$$

mit

m : Steigung

b : Ordinatenabschnitt

Aufgaben

Skript

Nr. 39a

erste Aufgabe

Zusatzdokument

Kap. 3

3.1.1, 3.1.2 Nr. 1-5, 8

3.1.3

Nr. 1+2