

Vorlesung 15.9.2026

5. Potenzrechnung, Exponentialfunktion, Logarithmen

5.1 Potenzrechnung, Wurzelrechnung

Rechenregeln

$$a^2 \cdot a^3 = a^5$$

$$\frac{a^6}{a^2} = a^4$$

$$(a \cdot b)^2 = ab \cdot ab = a^2 b^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

} gleiche Basis

} gleicher Exponent

} Potenz der Potenz

} Vorzeichenwechsel
Exponent

} hoch Null

Bemerkungen

$$0^4 = 0$$

$$4^0 = 1$$

0^0 / Zahl: Sinnvoll 1
/ Grenzprozesse: unbestimmt

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

4 mal Faktor a

$$4a = a + a + a + a$$

viermal a

$$a^2 + a^3 = a \cdot a + a \cdot a \cdot a$$

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$100 = 10^2$$

$$10 = 10^1$$

$$1 = 10^0$$

$$0,1 = 10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$

$$0,01 = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$0,03 \neq \frac{1}{300}$$

$$= 3 \cdot 0,01 = \frac{3}{100} = 3 \cdot 10^{-2}$$

Präfixe

$$1 \text{ km} = 1 \cdot 10^3 \text{ m} = 10^3 \cdot 10^3 \text{ mm} = 10^6 \text{ mm}$$

$$4 \text{ m}^2 = 4 \cdot (10^2 \text{ cm})^2 = 4 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

$$9 \text{ mm}^3 = 9 \cdot (10^{-3} \text{ m})^3 = 9 \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ km})^3 = 9 \cdot 10^{-18} \text{ km}^3$$

Größenordnung

$$2^{10} \approx 10^3$$

$$2^{10} = 1024$$

Wurzeln

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$9^2 = 81$$

$$9^1 = 9$$

$$9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$9^0 = 1$$

Rechenregeln

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{denn } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$$

Beispiele

$$5a^2b + 3b^4 - 11a^2b = -6a^2b + 3b^4$$

$$2x^3y^{-1}(3x^2y^4 - 7x^{-5}y^{-2}) = 6x^5y^3 - 14x^{-2}y^{-3}$$

$$(2^{-2})^{-2} = 2^4 = 16$$

$$\frac{30c^2d^3}{40c^{-2}d^4} = \frac{3}{4} c^{2-(-2)} d^{3-4} = \frac{3}{4} c^4 d^{-1}$$

$$12x^2y^4z^5 - 18x^4y^2z + 16xyz^5 = 2xyz(6xy^3z^4 - 9x^3y + 8z^4)$$

$$19z^2 + z = z(19z + 1)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{7}(3\sqrt{7} - 5\sqrt{7}) &= 3\sqrt{7}^2 - 5\sqrt{7}^2 = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 21 - 35 = -14 \\ &= \sqrt{7}(-2\sqrt{7}) = -2 \cdot 7 = -14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\underbrace{2\sqrt{6}}_a - \underbrace{3\sqrt{5}}_b)^2 &= (\underbrace{2\sqrt{6}}_{a^2})^2 - 2 \cdot \underbrace{2\sqrt{6}}_a \cdot \underbrace{3\sqrt{5}}_b + (\underbrace{3\sqrt{5}}_{b^2})^2 \\
 &= 4 \cdot 6 - 12\sqrt{30} + 9 \cdot 5 \\
 &= 24 - 12\sqrt{30} + 45 \\
 &= 69 - 12\sqrt{30} \\
 &= \cancel{57\sqrt{30}}
 \end{aligned}$$

Punktrechnung vor Strichrechnung

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{6}} \quad ?$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}+6}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{3+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} = \frac{6+2\sqrt{6}}{9+6\sqrt{6}+6}$$

} geht nicht

So erweitern, dass die 3. Binomische Formel entsteht,
denn dann werden die gegebenen Summanden einzeln quadriert.

$$\frac{2}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = \frac{6-2\sqrt{6}}{9-6} = \frac{6-2\sqrt{6}}{3} = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Grafische Darstellung

$$f_1(a) = a^2 \quad \text{/// } a^n, n \text{ gerade}$$

$$f_2(a) = a^3 \quad \text{/// } a^n, n \text{ ungerade}$$

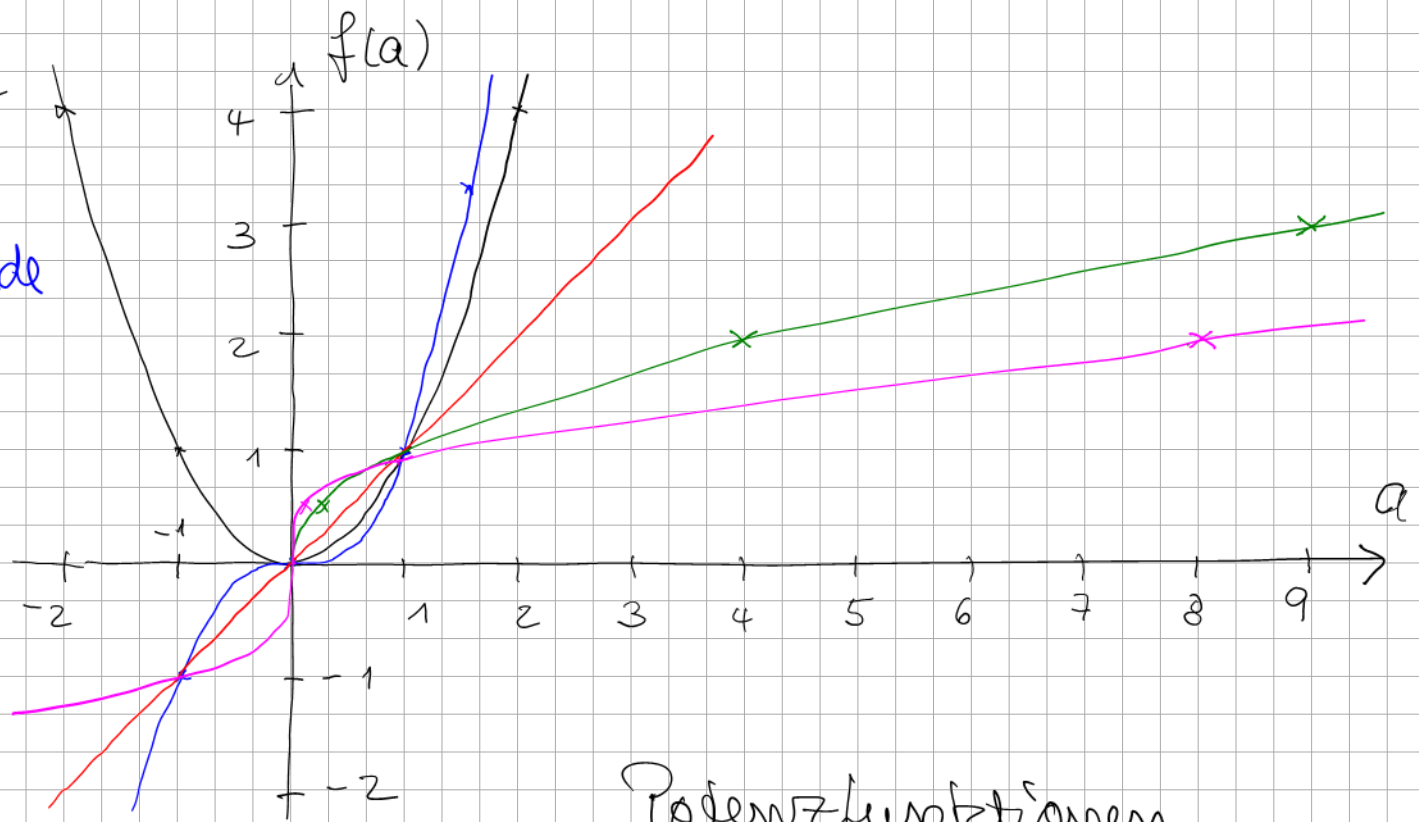
$$f_3(a) = a \quad \text{///}$$

$$f_4(a) = \sqrt{a} \quad \text{///}$$

$$\sqrt[n]{a}, n \text{ gerade}$$

$$f_5(a) = \sqrt[3]{a} \quad \text{///}$$

$$\sqrt[n]{a}, n \text{ ungerade}$$



Potenzfunktionen

5.2 Exponentialfunktion

200€ gespart

Zwei Möglichkeiten zur Geldanlage

1) jedes Jahr 40€ dazu

- fester Betrag dazu, lineares Wachstum

2) jedes Jahr 10% dazu

- fester Anteil dazu, exponentielles Wachstum

Was ist günstiger?

1. Fall: $f(x) = 40x + 200$

2. Fall:

Jahr 0: 200€

Jahr 1: $200€ + \frac{10}{100} \cdot 200€ = 200€ \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 200€ \cdot 1,1$

Jahr 2: $\underbrace{200€ \left(1 + \frac{10}{100}\right)} + \frac{10}{100} \cdot \underbrace{200€ \left(1 + \frac{10}{100}\right)} = \underbrace{200€ \left(1 + \frac{10}{100}\right)} \left(1 + \frac{10}{100}\right)$
 $= 200€ \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = 200€ \cdot 1,1^2$

Jahr 7: $200€ \left(1 + \frac{10}{100}\right)^7 = 200€ \cdot 1,1^7$

Allgemein:

$$f(x) = 200 \cdot 1,1^x$$

Exponentialfunktion

2 Jahre:

1) $f(2) = 2 \cdot 40 + 200 = 280$

2) $f(2) = 242$

10 Jahre:

1) $f(10) = 600$

2) $f(10) = 518$

15 Jahre:

1) $f(15) = 800$

2) $f(15) = 835$



Grafische Darstellung

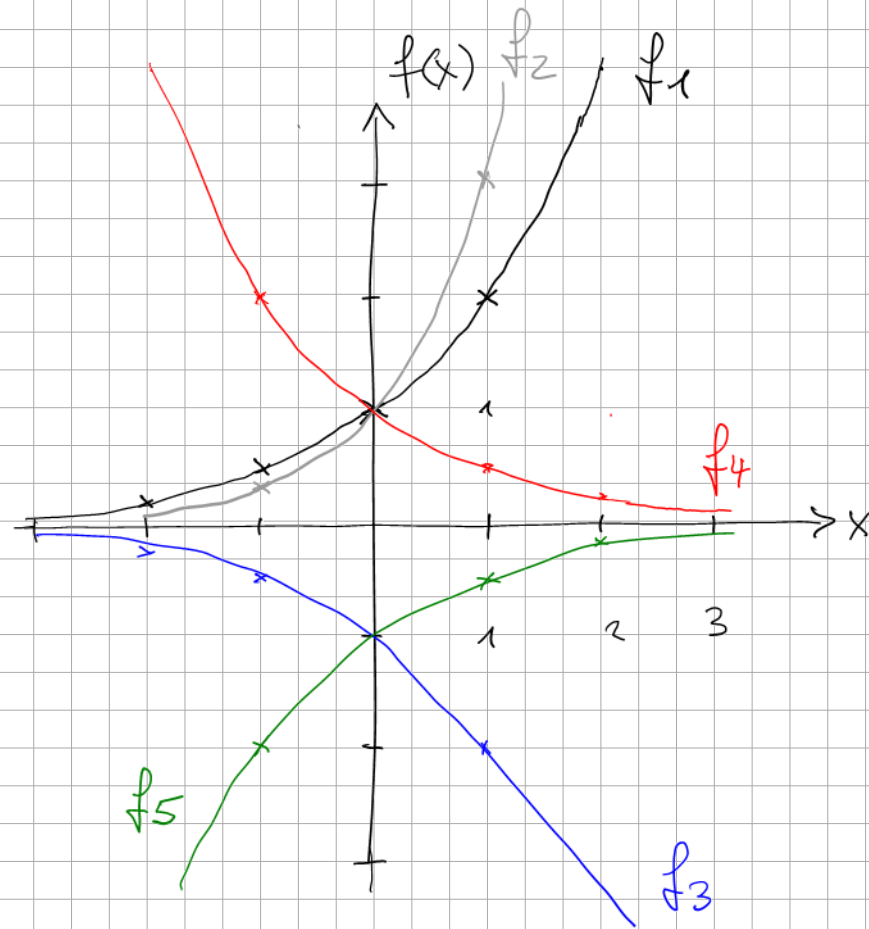
$$f_1(x) = 2^x$$

$$f_2(x) = 3^x$$

$$f_3(x) = -2^x$$

$$f_4(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1^x}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f_5(x) = -2^{-x}$$



Aufgaben

Teil 1: Skript Nr. 16, 17 a+b, 18, 19, 20

Zusatzdokument Kap. 5.1 Nr. 1, 3

Teil 2: Skript Nr. 17 c-e, 21

Zusatzdokument Nr. 2